II Bienal da SBM

Salvador/BA - 25 a 29 de Outubro de 2004

Olimpíada de Matemática - Uma porta para o futuro

Dicas para montar um projeto e 50 problemas de treinamento para iniciantes

Emanuel Carneiro

Apresentação

Os livros nos contam que, em tempos mais antigos, matemáticos desafiavam uns aos outros propondo questões complicadas e por muitas vezes se reuniam em praça pública para a realização de torneios, onde teriam que resolver equações difíceis. O que nasceu talvez por um capricho do ego destas pessoas tomou forma mais salutar com a realização da 1a Olimpíada de Matemática, na Hungria em 1896.

De lá pra cá, as competições de matemática entre estudantes vêm a cada dia se organizando e se mostrando um forte indicador para descobrir novos talentos para a ciência. Em 1959, foi realizada a $1a$ Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), com berço no leste europeu e contando apenas com a presença de países comunistas. Em 1965 a Finlândia se torna o primeiro país não comunista a fazer parte do hall de participantes da IMO, abrindo o caminho para que esta competição viesse a ser a maior de matemática do mundo atual (hoje na sua edição 46), com cerca de 85 países participantes por ano e que reúne em média 500 estudantes de todo o planeta.

Esse evento mundial estimulou a criação de pólos em cada região. Assim, hoje em dia, cada país conta com sua Olimpíada Nacional de Matemática, e por um raciocínio análogo, as províncias destes países também resolveram organizar competições de matemática e até os próprios municípios.

Foi assim que tudo começou em nosso país. Em 1979 foi realizada a $1a$ Olimpíada Brasileira de Matemática, por iniciativa amadora de alguns matemáticos. A OBM está hoje em sua $26a$ edição, abrangendo cada vez lugares mais remotos em nosso país, contando com a participação anual de cerca de 150.000 alunos. Vários estados brasileiros também já contam hoje com sua própria Olimpíada de Matemática, numa prova de evidente crescimento do interesse das pessoas por estas competições.

Por muito tempo, o trabalho de se organizar as competições de matemática em nosso país foi completamente amador, feito por admiradores incondicionais da matemática e de seus segredos. Apenas há alguns anos (em 1998), uma verba do governo foi destinada para fins de apoio, e com isso a OBM cresceu em estrutura e em número de adeptos. O resultado do Brasil na IMO vem se consolidando a cada ano, hoje ocupando posição de destaque entre os 20 melhores países do mundo. Sim, ao contrário do que muitas pessoas pensam, o Brasil é bom em matemática, sim! Por enquanto talvez só na matemática de ponta, mas o mais importante é que isso foi conquistado em relativamente pouco tempo, o que nos impulsiona a acreditar mais e mais no POTENCIAL que o brasileiro tem para aprender.

Este texto é sobre isso. Sobre o POTENCIAL de nossos estudantes que ficam em sua maioria encurralados por um ensino público decadente. Sobre a entidade Olimpíada de Matemática que cresce em nosso país, como instrumento de desenvolvimento da educação e processo de inclusão social indiscutível pois oferece muitas oportunidades a jovens independentemente de raça, sexo e lugar onde mora.

Gostaria de apresentar a vocês minha visão das coisas e mostrar o que se pode fazer com um pouquinho de dedicação e vontade de melhorar. Quero apresentar a Olimpíada de Matemática não como um fim, mas como um dos meios, uma opção, para reerguermos o ensino de matemática no Brasil. Daí o título do texto.

Emanuel Carneiro - Fortaleza - Setembro de 2004

Capítulo 1

O que a matemática de Olimpíada tem de diferente: alguns exemplos

Até aqui, já falamos um pouco sobre a Olimpíada de Matemática, o histórico e as competições existentes no Brasil e no mundo. Chegou então a hora de conhecer um pouco dos problemas que costumam compor as provas destas competições.

Erroneamente, muitas pessoas pensam que estudar para participar de uma Olimpíada de Matemática é avançar na matéria usual do colégio, que por exemplo um aluno da 5a série deva estudar equação do 2o grau, ou um aluno do ensino médio deva saber tudo de cálculo. Não é nada disso. Os problemas não exigem uma dose maior de conhecimento, e sim o despertar de um raciocínio e de muita criatividade. O aluno é forçado a experimentar sua inteligência, diferentemente da maioria dos problemas mecânicos que fazem parte do currículo escolar.

Como primeiro exemplo, o seguinte problema foi proposto na Olimpíada de Matemática da Escola Pública do Estado do Ceará em 2003, na modalidade II (1o ano do ensino médio):

Exemplo 1.0.1 *São dadas 4 moedas aparentemente iguais. Sabe-se que uma delas é falsa (tem peso diferente das demais). Mostre como descobrir a moeda falsa com 2 pesagens em uma balança de dois pratos.*

Tentem pensar alguns minutos antes de olhar a solução...

Solução: Chame as moedas de A, B, C, D. Pese duas delas, digamos A e B. Temos então duas possibilidades:

- Há equilíbrio entre A e B: Nesse caso A e B devem ser moedas legítimas. Pese então A com C. Se equilibrar de novo, a falsa deverá ser a moeda D. Se não equilibrar, C será a falsa.
- Não há equilíbrio entre A e B: Concluímos daí que A ou B é a falsa. Pese então A e C (que é uma moeda verdadeira). Se houver equilíbrio, B será a falsa. Se desequilibrar, A será a falsa.

De qualquer modo você consegue então descobrir qual a moeda falsa usando duas pesagens. ■

Comentários: Após ter visto a solução deste problema, podemos destacar alguns pontos:

- Apesar de ter sido proposto para a modalidade II (1o ano do ensino médio), este problema poderia ser resolvido por alunos do ensino fundamental, já que são necessários apenas raciocínio e um pouco de paciência.
- A maioria dos alunos ao olhar um problema deste tipo pensa 1 minuto e diz que não sabe fazer. Isso ocorre porque eles estão acostumados com uma matemática rápida, de muita conta e pouca idéia. Se o aluno for devidamente estimulado (ofereça um prêmio!) certamente ele vai fazer.
- Como foi visto na solução, o aluno ao fazer uma prova de Olimpíada de Matemática, deve também ter um bom domínio do português, já que o único modo que ele tem para expor suas idéias é através do lápis e do papel. Muitas vezes alunos saem das provas dizendo:

  - Ah professor, essa questão eu sabia fazer, só não consegui explicar direito...

Não adiantou nada. A pessoa que vai corrigir vai pensar que ele não sabia. Resumindo, está em jogo aqui não só a capacidade de raciocínio do aluno, mas também sua capacidade de comunicação escrita e a sua organização (afinal, só nós professores sabemos como é chato corrigir provas cheias de borrões infindáveis...)

Após este primeiro contato, podemos então ver um segundo exemplo.

Exemplo 1.0.2 *(i) Mostre como dispor os números* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *nas casas de um quadrado* 3×3 *para formar um quadrado mágico, ou seja, para que a soma dos números nas linhas, colunas e diagonais seja a mesma.*

(ii) Prove que em todo quadrado mágico o número da casa central deve ser o 5.

Novamente, pense um pouco antes de ver a solução.

Solução: (i) Há várias maneiras. Por exemplo:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

(ii) Digamos agora que a soma comum (das linhas, colunas e diagonais) seja S. Vejamos então uma distribuição qualquer para um quadrado mágico:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ \hline \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \hline \mathrm{g} & \mathrm{h} & \mathrm{i} \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} a+b+c & = & S \\ d+e+f & = & S \\ g+h+i & = & S \end{array}$$

Somando as três expressões temos:

$$\begin{array}{ll} & a+b+c+d+e+f+g+h+i = 3S \\ \Rightarrow & 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 = 3S \\ \Rightarrow & S = 15 \end{array}$$

Por enquanto, só usamos as somas dos números de cada linha. Temos ainda uma porção de somas que podemos utilizar. Estrategicamente escolhemos as seguintes:

$$\begin{array}{rcl} a+e+i & = & 15 \\ g+e+c & = & 15 \\ d+e+f & = & 15 \\ b+e+h & = & 15 \end{array}$$

Somando estas últimas quatro expressões, obteremos:

$$\begin{array}{ll} & (a+e+i)+(g+e+c)+(d+e+f)+(b+e+h) = 60 \\ \Rightarrow & (a+b+c+d+e++f+g+h+i)+3e = 60 \\ \Rightarrow & (1+2+3+...+9)+3e = 60 \\ \Rightarrow & 45+3e = 60 \\ \Rightarrow & e = 5 \end{array}$$

Mágica? ■

O que vocês acharam então deste segundo exemplo? O primeiro item é um ótimo exercício para qualquer idade. Imagina a felicidade de um aluno de 10 ou 11 anos que consiga resolvê-lo...Já o segundo item é um pouco mais elaborado. O aluno pode então perguntar:

-Professor, me diga como é que eu conseguiria fazer isso? Eu jamais teria essas idéias.

- Tudo bem, você não sabia. Agora eu já mostrei pra você. Da próxima vez então que aparecer algo assim, você já pode começar a ter estas idéias...

A melhor forma de uma pessoa aprender matemática é resolvendo exercícios. Quando não sabemos resolver algo, isso não deve ser o fim do mundo, afinal ninguém é obrigado a saber tudo. Neste ponto devemos chegar para alguém mais experiente para que esta pessoa nos dê novas idéias, para que ela nos passe o bizu e nos ensine a resolver o maldito problema. Deste momento em diante, teremos estas novas idéias em nosso arsenal e quando aparecer outro problema parecido...

O próximo exemplo é um pouco mais elaborado, mas não menos interessante:

Exemplo 1.0.3 *Mostre que não há inteiros ímpares* a, b, c, d, e, f *tais que:*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$$

Solução: Se isto fosse possível, teríamos:

$$\frac{bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde}{abcdef} = 1$$

$$\Rightarrow \quad bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde = abcdef$$

Nesta última expressão temos do lado esquerdo a soma de seis números ímpares, que sabemos que é par. Porém, do lado direito temos um número ímpar ($abcdef$). Absurdo!! $\blacksquare$

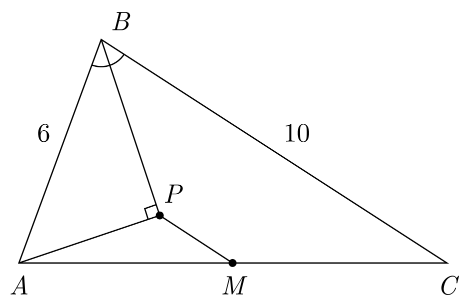
Comentários: A solução acima já é um tanto quanto mais sofisticada. Não que seja difícil, pois acredito que a maioria das pessoas está apta a compreendê-la. Porém, a solução usa duas ferramentas básicas em matemática: o método de redução ao absurdo e os argumentos de paridade (um número ou é par ou ímpar, jamais os dois ao mesmo tempo).

Se o aluno não conhece estas ferramentas, ele vai certamente encontrar dificuldade. Novamente voltamos à conversa do exemplo anterior. Cabe então ao professor ensinar as armas básicas (e nestas o absurdo e a paridade estão certamente incluídas) para que seus pupilos possam achar estas idéias naturais.

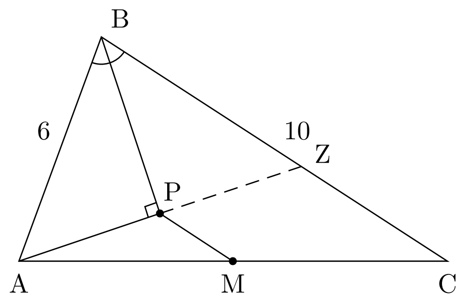
Um fato curioso é que a maioria dos alunos conhece a paridade dos números (afinal eles devem jogar par-ou-ímpar para sobreviver), mas ficam extremamente abismados quando vêem que argumentos de paridade possam ser usados para resolver muitos problemas de matemática.

No próximo exemplo vemos um tópico que está entre os mais queridos na matemática, e que aparece com freqüência nas competições: geometria.

Exemplo 1.0.4 *No triângulo* ABC *abaixo,* BP *é bissetriz do ângulo* B *e* M *é o ponto médio do lado* AC*. Se* $AB = 6$ *e* $BC = 10$*, calcule* PM*.*



Solução: Veja a nova figura, onde prolongamos AP até encontrar o lado BC em Z.



Note que no triângulo ABZ, o segmento AP é altura e bissetriz. Isso faz com que o triângulo ABZ seja isósceles! Logo $BZ = AB = 6$ e portanto:

$$ZC = BC - BZ = 10 - 6 = 4$$

Perceba ainda que como o triângulo ABZ é isósceles, BP é altura, bissetriz,... e mediana! Logo P é o ponto médio de AZ. Como M já é o ponto médio de AC, vemos que PM é a base média no triângulo AZC. Conclusão:

$$PM = \frac{ZC}{2} = 2$$

■

E este agora, o que acharam? A geometria plana é um dos tópicos que mais cativam os estudantes. Acho que eles se sentem felizes fazendo desenhos. Isso é bom, pois na prática 30% dos problemas propostos em olimpíadas de matemática são de geometria.

Agora vamos a alguns exemplos voltados para alunos do ensino médio. Anteriormente vimos problemas de matemática que envolviam muito raciocínio e criatividade, mas nem sempre isso pode ser suficiente. Se um aluno deseja participar da Olimpíada de Matemática e obter sucesso, uma condição necessária é que ele tenha o domínio da matéria do colégio, dos fundamentos de matemática. Que ele tenha certa base. Isso é mais notável quando mostramos os problemas olímpicos para o ensino médio, pois nesses o aluno deve aliar sua inteligência à sua maturidade matemática.

O próximo exemplo é muito bacana. Foi questão da Olimpíada Brasileira de Matemática, 1a fase, em 2002.

Exemplo 1.0.5 *Seja α a maior raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Calcule $\alpha^5 - 5\alpha$.*
Este realmente vale 5 minutos do seu tempo...

Solução: Usando o fato que $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, temos:

$$\begin{array}{rcl} \alpha^2 & = & \alpha + 1 \\ \Rightarrow \alpha^3 & = & \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1 \\ \Rightarrow \alpha^4 & = & \alpha(2\alpha+1) = 2\alpha^2 + \alpha = 3\alpha + 2 \\ \Rightarrow \alpha^5 & = & \alpha(3\alpha+2) = 3\alpha^2 + 2\alpha = 5\alpha + 3 \end{array}$$

Assim concluímos que:

$$\alpha^5 - 5\alpha = 3$$

■

Comentários:

- Muitas vezes as pessoas esquecem de usar a própria definição de raiz de uma equação. Que este é um número que posto no lugar do x vai zerar a equação. Foi isso que fizemos na solução.

- A maioria dos estudantes, quando escuta a palavra raiz, vai longo chamando a fórmula de Bháskara para encontrar:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e vai fazendo um montão de contas...

- Isso não impede que ele resolva o problema. Aí entra o que dissemos anteriormente. Se ele for um bom aluno do ensino médio e tiver aprendido binômio de Newton ele vai conseguir calcular $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5$, e vai encontrar a resposta. Vai dar só um pouquinho mais de trabalho...

Para encerrar então esta pequena amostra de problemas interessantes em matemática, aí vai um bem legal:

Exemplo 1.0.6 *Prove que a função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2})$$

não é periódica.

Solução: Vamos novamente usar o método de redução ao absurdo (isso realmente é importante!).

Suponha que nossa função f seja periódica de período p. Isso quer dizer que:

$$f(p + x) = f(x)$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Em particular, tomando $x = 0$, temos:

$$f(p) = f(0) \Rightarrow \cos p + \cos(p\sqrt{2}) = \cos 0 + \cos 0 = 2$$

Daí devemos então obrigatoriamente ter:

$$\cos p = \cos(p\sqrt{2}) = 1$$

Porém, como somos estudiosos da trigonometria, sabemos que:

$$\begin{aligned} \cos p = 1 \quad &\Rightarrow \quad p = 2k_1\pi \\ \cos(p\sqrt{2}) = 1 \quad &\Rightarrow \quad p\sqrt{2} = 2k_2\pi \end{aligned}$$

onde k_1 e k_2 são inteiros (nenhum dos quais é zero, pois p não é zero, já que f é claramente não-constante) Dividindo então estas duas últimas expressões, obtemos:

$$\sqrt{2} = \frac{p\sqrt{2}}{p} = \frac{2k_2\pi}{2k_1\pi} = \frac{k_2}{k_1}$$

Chegamos então a um absurdo, pois sabemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional $\blacksquare$

Espero que vocês tenham gostado destes diversos problemas, e mais importante ainda, que tenham percebido as semelhanças e diferenças entre os problemas de olimpíada e os problemas de sala de aula.

Penso também que agora vocês estejam convencidos que uma pessoa não precisa ter estudado até o terceiro ano da faculdade para fazer estes problemas. Eles são acessíveis a todos.

Estão encerrados portanto os trabalhos deste capítulo.

Capítulo 2

Como montar um projeto Olimpíada de Matemática na sua escola

Este capítulo talvez seja o mais importante de todos. Desejo aqui passar a vocês algumas dicas de como implementar um projeto de Olimpíada em suas escolas, sejam elas públicas ou privadas.

Para facilitar o entendimento das páginas que se seguem, resolvi dividir o capítulo em vários tópicos, que listo a seguir:

1. O que é um projeto de Olimpíada?
2. Quais as vantagens de se ter um projeto como este na escola?
3. Que professores/alunos devem participar?
4. Como definir as turmas e os horários das aulas.
5. Material necessário.
6. Sugestão de programas didáticos.
7. Posso sofrer rejeição de alunos/professores da escola?
8. O que eu (professor) ganharei com isso?
9. O que meus alunos ganharão com isso?
10. Montando uma mini-biblioteca.
11. Contratempos que podem acontecer.
12. Como dar continuidade ao processo?
13. Estímulo constante aos seus alunos.
14. Estreitando os laços com SBM e as universidades.

Vamos então discutir estes tópicos um a um. O que será dito aqui não pode ser tomado como certeza de sucesso futuro, são apenas algumas dicas que vão servir como guia para que os interessados possam iniciar/continuar um trabalho semelhante.

Vamos ao que interessa!

2.1 O que é um projeto de Olimpíada?

Já discutimos nesse livreto vários tópicos relacinados com as competições matemáticas: seu histórico, bases pedagógicas, exemplos de problemas...mas o que vem a ser um projeto de Olimpíada de Matemática na escola?

Este projeto consiste na preparação de alunos para competições de matemática.

Um grupo de professores de matemática da escola vai se reunir e iniciar a preparação de algumas turmas para as competições matemáticas. Ensinando o quê? Obviamente, matemática! Porém não uma aula comum, e nem um reforço escolar. Os tópicos a serem abordados são aqueles exemplificados no capítulo anterior (vamos já discutir mais sobre isso), de uma maneira mais informal, com o laço professor-aluno mais estreito, de modo que as pessoas que se reúnam ali, possam desfrutar do simples prazer de discutir matemática.

2.2 Quais as vantagens de se ter um projeto como este na escola?

O principal objetivo do projeto Olimpíada de Matemática é desenvolver o ensino de matemática na escola. Acreditamos que projetos como este são uma porta para o futuro, uma das alternativas de melhorar como um todo a educação em nosso país.

Como este processo funciona?

O ensino de matemática em sala de aula e nas aulas para olimpíada devem funcionar de maneira harmoniosa, um complementando o outro, de preferência até ministrado pelos mesmos professores. O aluno que frequenta as aulas de olimpíada, vai ter oportunidade de estar em contato com novas idéias da matemática, e isso certamante vai estimular seu raciocínio e sua criatividade.

Rapidamente o seu rendimento escolar vai melhorar, não só em matemática, mas também nas outras matérias. Ele vai virar então um referencial na sala, sendo respeitado pelos colegas, vai tirar dúvidas, etc... e isso vai fazer com que os próprios colegas se sintam estimulados a assistir as aulas de olimpíada também. Com o passar do tempo o professor vai notar que o embasamento dos alunos melhorou, e ele mesmo vai se sentir mais estimulado a ensinar, a procurar coisas mais interessantes para passar aos alunos. Com isso ele vai também estudar e aprender mais. E assim o ciclo recomeça com professores e alunos, ainda mais estimulados.

Observe que o mesmo processo acontecerá se forem ofertadas aulas para olimpíada de química, física, biologia, informática, astronomia...

Por que você diz que a participação do aluno na olimpíada de matemática tende a melhorar seu rendimento em sala de aula, tanto em matemática como nas outras disciplinas?

As competições de matemática são em geral bem mais difíceis que as provas do colégio. É um princípio simples: duas pessoas vão participar de uma corrida de 3km. Um deles treina exatos 3km todo dia, enquanto o outro treina 5km. No dia da corrida quem vai sentir mais facilidade? Ao treinar para fazer uma prova mais difícil, o seu rendimento nas provas do colégio vai certamente aumentar.

E nas outras disciplinas? Bem, não é porque nós somos matemáticos, mas de certa forma todos devem concordar que matemática e o português desempenham um papel essencial no processo educacional. E se uma pessoa tem a oportunidade de desenvolver o raciocínio e o lado criativo, com certeza isso o ajudará diretamente em outras ciências exatas com física e química, por exemplo.

Os projetos de Olimpíada de Matemática nas escolas são relativamente novos, têm no máximo 10 anos, tanto em minha cidade (Fortaleza) como em São Paulo, que foram as pioneiras. O que houve na cidade de Fortaleza foi um grande salto da educação local, que nos últimos anos vem conseguindo resultados expressivos a nível nacional.

Obviamente, não tenho a pretensão de apontar a Olimpíada de Matemática como único responsável por isso, mas devo incluí-la, juntamente com os demais projetos de olimpíada científicas, como fator importante para este salto de qualidade. Seguem então alguns exemplos concretos:

- Nos últimos anos, dentre os medalhistas em olimpíadas científicas (matemática, física, química,...) de nível regional e nacional, há sempre presença marcante de cearenses.

- Nos concursos e vestibulares mais concorridos do país, como por exemplo o ITA e o IME, a quantidade de estudantes de Fortaleza aprovados vem crescendo a cada ano. Para se ter uma idéia, no último vestibular do ITA (2003-2004), só a cidade de Fortaleza aprovou uma quantidade de alunos comparável (salvo engano maior) a todo o estado de São Paulo.

- Agora uma estatística curiosa: nos últimos anos, em duas oportunidades (1994 e 2000) o primeiro lugar do vestibular para Medicina na UFC, foi um estudante que havia participado da Olimpíada Internacional de Matemática. Em 1994, o estudante Marcondes França foi a IMO em Hong Kong e em 2000 o estudante Ulisses Medeiros foi a IMO na Coréia. Ambos amigos de muito bom grado, hoje com bastante sucesso em suas carreiras médicas.

Resumindo, um diretor que implante essas idéias em sua escola pode esperar a médio prazo um salto de qualidade na formação de seus alunos, que será o reflexo do desempenho deles nas competições culturais e vestibulares.

Esses resultados se tornam com freqüência, e merecidamente, motivo de marketing das escolas particulares de Fortaleza. E agora também do Governo do Estado, que através do Projeto Numeratizar iniciou no ano passado (2003) uma Olimpíada de Matemática da Rede Pública que reuniu 150.000 alunos, e tem tudo para começar a reerguer o ensino público do nosso Estado.

2.3 Que professores/alunos devem participar?

A princípio, todos os professores de matemática interessados podem fazer parte do novo projeto de olimpíada da escola. Pode ser feita uma reformulação do horário de cada um, por exemplo um professor que tem 20 horas semanais em uma escola pode acertar com a direção para ter 16 horas em sala de aula usual e 4 horas com turmas de olimpíada.

Definidos aqueles professores que vão dar aulas para a preparação de alunos para a olimpíada, é necessário que o material a ser abordado seja dividido entre eles (discutiremos sobre o material mais adiante) e que seja combinado quem vai ser responsável por qual turma e em que horário (já falaremos disso também).

E os alunos? Como devem ser escolhidos? Para uma escola que já possui um projeto como este, ou escolas com grande quantidade de alunos, geralmente é feito um pequeno teste de seleção. Esta deve ser uma prova apenas para detectar os possíveis talentos que você professor vai ter em suas turmas.

O ideal é que seja permitida a participação de todos os alunos interessados, sem cortes iniciais. Pois a experiência nos diz que uma turma de olimpíada que começa por exemplo com 30 alunos, depois de um semestre tem apenas 20, depois de um ano, 15 ou menos. Há uma evasão natural dos alunos. Por vários motivos:

- Nem todo mundo vai querer ficar indo para a escola em horários extras. Muitos vão olhar logo e dizer:

  -Tô fora! Já sou muitíssimo ocupado (isso é o que ele pensa). Isso é coisa de nerd...

- Outros começam e não aguentam o rojão. Tenha em mente que nem todos que estão lá terão vocação para matemática (certamente terão para outras matérias...). Alguns desses se esforçarão e aprenderão muitas coisas, outros desistirão. Não fique triste.

Aviso aos professores: você terá consigo vários tipos de aluno. Sua turma pode ser bastante heterogênea inicialmente, mas não se preocupe, isso se resolverá com o tempo. Vale muito mais a pena trabalhar com alunos esforçados e estudiosos do que com aqueles que se acham superiores e não são nada modestos (estes podem até ser realmente inteligentes...), mas que só ficam atrapalhando a aula. Ou seja, ponha logo tudo nos eixos e dite as regras: que ali ninguém é melhor do que ninguém.

2.4 Como definir as turmas e os horários das aulas

A Olimpíada de Matemática vem se tornando bastante competitiva ao longo dos anos. A cada ano mais pessoas vêm participando, e como resultado disto a seleção é cada vez maior.

Não apenas por este motivo, o ideal é que um aluno comece a se preparar para fazer Olimpíada de Matemática o mais cedo possível. Quando o aluno é mais novo, sua base ainda está em formação, e desta forma a preparação olímpica pode ajudar bastante no desenvolvimento de sua maturidade matemática. Além disso tem-se mais tempo para trabalhar com o(a) garoto(a).

Quando pensamos em preparar um aluno já mais velho (digamos 2o ou 3o ano do ensino médio), devemos corrigir vários defeitos de base que ele já adquiriu ao longo da vida, para depois começar a ensinar alguns tópicos de matemática olímpica e a desenvolver as idéias. E então, qunado você vê que o aluno tem potencial, ele termina o 3o ano, e não vai mais participar das competições sob sua tutela.

É portanto fortemente recomendado que você comece o seu projeto de Olimpíada de Matemática com turmas de 5a série até o 1o ano. Se possível uma turma para cada série. Caso isso não seja possível, um outro modo seria dividir os alunos pelos níveis da OBM: nível I (5a e 6a séries), nível II (7a e 8a séries) e nível III (ensino médio).

As aulas de olimpíada deverão ser em horários extra-classe, ou seja em períodos diferentes das aulas usuais dos alunos. Por exemplo se os alunos da escola assitem aula pela manhã, você pode marcar as aulas de olimpíada duas vezes por semana à tarde de 2:30 as 4:10. Ou se você tem alunos em dois turnos, manhã e tarde, e quer reuni-los numa só turma de olimpíada, isso pode ser feito duas vezes por semana à noite (6:30 - 8:00), ou aos sábados.

De fato, os horários vão se acomodar de acordo com a necessidade e disponibilidade dos alunos e professores envolvidos. Agora quantas aulas deve ter cada turma de olimpíada? Bem essa é uma pergunta flexível. Acho que em 4 horas semanais (2 aulas de 2 horas) para cada turma já se pode desenvolver um bom trabalho. Se o seu colégio já vem com uma turma que passou pela 5a, 6a, 7a e agora está na 8a série, você pode pensar em aumentar para 6 horas semanais (isso vale para turmas experientes).

Caso a situação esteja economicamente difícil, também podemos pensar em 4 horas semanais por nível. O que daria um custo inicial para a escola de 8 aulas se pensarmos em começar só com níveis I e II. **Agora, o importante é começar!!** É bater o centro. Depois as coisas vão se acertando, você pôe mais umas aulas ali, dá um intensivão perto das provas, faz um cursinho nas férias...

Outra dica importante. Se você for optar por dar 4 ou 6 aulas em uma turma, de preferência faça isso em dias intercalados (seg-qua-sex ou ter-qui ou qua-sáb). Intercalando os dias eles vão ter mais contato com você, além do que, você pode explorar mais o enorme potencial que têm os exercícios pra casa, e passá-los duas ou três vezes por semana. É claro, como já disse antes, isso vai depender da disponibilidade de tempo/dinheiro de todos.

2.5 Material necessário

Agora chegamos a um ponto crucial. Você, professor deve tomar alguns livros e materiais como base para treinar seus alunos. Surpreenda-se com as coisas novas que você mesmo vai aprender!

A maior fonte de material e sabedoria dos tempos modernos chama-se Internet. Há diversos sites que disponibilizam muito material para o treinamento olímpico. E o mais importante: de graça. Basta entrar num site de busca e se aventurar.

Abaixo falaremos um pouco dos tópicos a serem estudados para a Olimpíada de Matemática, os livros recomendados para iniciantes e alguns sites interessantes.

Tradicionalmente, os assuntos abordados são divididos em 4 temas: Teoria dos Números, Álgebra, Geometria e Combinatória. Falaremos um pouco de cada um deles, indicando alguns livros e ainda apresentando uma sugestão de conteúdo a ser trabalhado.

2.5.1 Teoria dos Números

Os tópicos em Teoria dos Números são aqueles relacionados com as propriedades elementares dos números inteiros: divisibilidade, números primos, fatoração, MDC, MMC,...

Este é um tópico clássico na olimpíada, e fortemente recomendado para iniciar o treinamento de jovens, pois vários destes assuntos já são abordados no colégio.
Livros recomendados para iniciantes:

- Teoria Elementar dos Números, Edgar de Alencar Filho (Brasil)
- Aritmetica, Maria Elena Becker, Ed. Red Olimpica (Argentina)
- Aritmetica, Saulo Aranda (Venezuela)

Livro recomendado para nível Intermediário:

- Introdução à Teoria dos Números, José Plínio Santos, Coleção Matemática Universitária (Brasil)

Não é obrigado o estudo por um destes livros acima, qualquer livro que cubra os mesmos assuntos pode ser utilizado como base.

2.5.2 Álgebra

Nesta área, os alunos devem aprender bem as operações com números e suas propriedades. A álgebra estuda principalmente as equações, de primeiro e segundo graus, os sistemas de equações, os produtos notáveis. Para um aluno do ensino médio, quando falamos em álgebra, englobamos diversos assuntos: polinômios, números complexos, seqüências...

A álgebra é bastante ensinada no colégio. Daí, o primeiro passo do aluno será compreender bem as lições da escola, para depois vir a se aprofundar nas aulas de olimpíada.

Livro recomendado para iniciantes:

- Livros do colégio em geral.

Livro recomendado para nível intermediário:

- Challenging Problems in Algebra, I.M. Yaglom (EUA)

Veja mais sobre álgebra na seção: Técnicas de Resolução de Problemas.

2.5.3 Geometria

Aqui todos nós sabemos do que se trata. É a clássica geometria plana. Sempre presente nas provas de olimpíada. Também é bastante ensinada em sala de aula, de modo que o aluno deve saber bem a matéria do colégio para depois se aprofundar.

Livro recomendado para iniciantes:

- Matemática Elementar, vol. 9, Gelson Iezzi et al. (Brasil)

Livros recomendados para nível intermediário:

- Geometria, vols 1 e 2 , A.C. Morgado (Brasil)
- Challengig Problems in Geometry , I.M. Yaglom (EUA)
- Geometry Revisited, H.S. Coxeter (EUA)

2.5.4 Combinatória

Dá-se o nome de combinatória a tudo aquilo que não é teoria dos números, álgebra ou geometria. Os problemas de combinatória são aqueles legítimos de olimpíada, que usam bastante a criatividade do aluno. Na lista de tópicos a serem estudados merecem destaque: paridade, contagem, princípio das gavetas, jogos, invariantes...

Este assunto é a grande novidade. Geralmente os estudantes não têm contato com este tipo de matemática na escola, por isso os professores devem ir bem devagar e sempre estimulando o raciocínio dos seus alunos.

Livros recomendados para iniciantes:

- Mathematical Circles, the russian experience, D. Fomin (Russia - traduzido para o inglês)
- Contos com contas, Miguel de Guzman (Portugal)
- Aventuras Matemáticas, M. Guzman (Portugal)

Livro recomendado para nível intermediário

- Combinatória e Probabilidade, A.C. Morgado et al (Brasil)

2.5.5 Técnicas de Resolução de Problemas

Os alunos que se preparam para as olimpíadas de matemática devem ter seu treinamento voltado para a resolução de problemas. Um grande amigo, Rui Lopes Viana Filho, medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática em 1998, costumava dizer que seu treinamento matemático era baseado na resolução de exercícios. Havia o que ele chamava de sua 'caixa de ferramentas' que eram aqueles problemas-chave que ele já havia resolvido. Então quando era chegada a hora das provas, de resolver novos problemas, ele sempre recorria à sua caixa de ferramentas para ver se encontrava alguma idéia parecida. É mais ou menos assim que as coisas funcionam.

Alguns livros recomendados para o Olimpíada de Matemática são coletânias de problemas e soluções. Estes abordam todos os assuntos supracitados e são de fundamental importância para os professores (que podem fazer listas, simulados, aulas de problemas...) e para os alunos (que podem tentar resolvê-los e caso não consigam, podem aprender novas técnicas entendendo as soluções).

Abaixo listamos vários destes livros.

Livros recomendados para iniciantes:

- Olimpíadas de Matemática do Estado do Rio de Janeiro, Eduardo Wagner et al (Brasil)
- Olimpíadas Paulistas de Matemática, 1o grau (Brasil)
- Olimpíadas Paulistas de Matemática , 2o grau (Brasil)
- Contest Problem Book (AHSME e AIME), volumes 1 a 6 (EUA)

Livros recomendados para nível intermediário:

- The Hungarian Problem Book I, II, III (Hungria)
- Olimpíadas Brasileiras de Matemática 1a a 8a (Brasil)
- Olimpíadas Brasileiras de Matemática 9a a 16a (Brasil)
- Olimpíadas de Matemática do Cone Sul, 1a a 4a (Argentina)
- Olimpíadas de Matemática do Cone Sul , 5a a 12a (Brasil)
- Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática 1a a 10a (Brasil)

2.5.6 Revista Eureka!

Em 1998, com a reestruturação da Olimpíada Brasileira de Matemática, foi criada a revista Eureka!. Esta é uma publicação trimestral, que atualmente está em seu volume 19, cujo principal objetivo é o treinamento brasileiro para as olimpíadas de matemática. Esta revista é **extremamente recomendada** para um projeto de olimpíada na escola. Para saber mais informações de como assinar e como pedir os números anteriores consulte o site oficial da OBM:

www.obm.org.br

2.5.7 Livros para estudos avançados

Abaixo listamos mais alguns livros, agora mais avançados, voltados para o treinamento olímpico. Estes são recomendados apenas para alunos do ensino médio que já vêm em preparação constante e para professores. Todos são escritos em inglês.

1. Olimpíadas Internacionais de Matemática 1959-1974 (EUA)
2. Olimpíadas Internacionais de Matemática, 1975-1980 (EUA)
3. Olimpíadas Internacionais de Matemática, 1981 - 1994 (Índia)
4. Principles and Tecniches in Combinatorics, Cheng C. Chong (Taiwan)
5. Winning Solutions , Cecil Russeau and E. Lozanski (EUA)
6. 102 Problems in Combinatorics , Titu Andreescu (EUA)
7. Mathematical Miniatures , T. Andreescu e S. Savchev (EUA)
8. Mathematical Contests, todos os 7 volumes (95, 95-96, 96-97, 97-98, 98-99, 99-00, 00-01)
9. 101 Problems in Algebra, T. Andreescu (Australia)
10. Advanced Euclidean Geometry, M. Johnson (EUA)
11. Geometry Revisited, H.S. Coxeter et al (EUA)
12. USA Mathematical Olympiads, M. Klamkim (EUA)
13. The Tournament of the Towns, todos os volumes (Australia)
14. Combinatorics, Ioan Tomescu (Romenia)
15. Problems in Combinatorics and Graph Theory, I. Tomescu (Romenia)
16. Polynomials, E. Barbeau (EUA)
17. Complex Numbers in Geometry , S. Zahn (Coréia)
18. Mathematical Gems, volumes 1,2,3. H. Honsberger (EUA)
19. Mathematical Morsels, H. Honsberger (EUA)
20. Mathematical Mosaics , R. Vakil (Canadá)
21. In Pólya´s Footsteps, (EUA)
22. Problem solving through problems, I. Larson (EUA)
23. Problem Solving Strategies, A. Engel (Alemanha)
24. Geometric Inequalities , O. Botemma (EUA)
25. The Putnam Competition, volumes 1,2,3 (EUA)
26. Introduction to the Theory of Numbers, Niven and Zuckerman (EUA)
27. Elementary Number Theory, E. Burton (EUA)

2.5.8 Buscando na Internet

Abaixo estão listados alguns sites bastante interessantes. Nestes sites você pode encontrar informações sobre a olimpíada de matemática, provas de anos anteriores, material de treinamento, revistas, fotos e várias outras coisas.

A Internet é uma fonte inesgotável de conhecimento e informação. Certamente os alunos vão se empolgar muito mais se puderem ver fotos, listas de medalhados, curiosidades... E se eles próprios puderem fazer download de provas e material de treinamento, melhor ainda!

- www.obm.org.br - é a página oficial da Olimpíada Brasileira de Matemática. Contém tudo que você precisa saber e ainda com inúmeros links para os sites oficiais das Olimpíadas Estaduais.
- www.sbm.org.br - é a página oficial da Sociedade Brasileira de Matemática, onde você pode se cadastrar e ganhar inúmeras vantagens como por exemplo descontos na compra de livros.
- www.oma.org.ar - página da Olimpíada de Matemática Argentina.
- www.numeratizar.mat.br - página do projeto Numeratizar, que é a Olimpíada da Escola Pública do Ceará, com material de treinamento elementar.
- www.opm.mat.br - Olimpíada Paulista com várias coisas legais
- www.teorema.mat.br - Grupo Teorema de Matemática, também com inúmeras coisas legais.
- www.impa.br - Site do IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- http://www.geocities.com/CollegePark/7174 - Olimpíada Peruana de Matemática (esse link está na OBM)
- **www.google.com.br** - site de busca: deve ser o mais utilizado por vocês para procurar qualquer coisa que desejem.

2.6 Sugestão de programas

No Apêndice A do livro, damos sugestões de programas para o treinamento olímpico. Os professores devem adequar estas sugestões à sua disponibilidade de tempo, de livros e ao rendimento dos seus alunos.

Os conteúdos vão desde a 4a série até o 2o ano do ensino médio. Era um pouco grande para ser incluído aqui, no meio do texto, por isso, resolvi deixar como anexo.

2.7 Posso sofrer rejeição de alunos/professores da escola?

Toda novidade traz consigo admiração de uns, rejeição de outros. São os dois lados da moeda. Experiências comprovam que pode haver certa rejeição ao programa de treinamento olímpico na sua escola. Também não há motivo para desespero, pois são situações perfeitamente contornáveis.

Certas facções de alunos podem não querer participar do seu projeto. Natural. Opção deles. Se eles insistirem em tratar seus alunos como CDF, bitolados, nerds... não se preocupe, isso é normal e vai passar com o tempo. Em certos estados, isso reflete o pensamento da juventude em geral, de que ser estudioso e esforçado é errado, é coisa de extraterrestre, enquanto o legal é ser relaxado e passar se arrastando, mas ser um cara da galera.

Fico triste com tais atitudes, mas ainda assim acredito que esta mentalidade vá mudar ao longo do tempo. Em meu estado, o Ceará, os alunos esforçados e inteligentes, são muito estimados por seus colegas e por suas escolas, alguns até com certas regalias.

O que mais me preocupa é a rejeição que pode haver por parte da direção e de outros professores da escola. Você pode se perguntar: Ora por que essas pessoas vão querer atrapalhar?

Eu diria que é comodismo ou inveja da parte delas. São aquelas pessoas que não querem mudar, que acham que tudo está bom como está, e quando aparece uma pessoa propondo uma novidade para desenvolver as coisas, elas ficam desencorajando: isso não vai dar certo, melhor nem começar,...

O que fazer com essas pessoas? Bem, o melhor é dizer: se você não quer ajudar, tudo bem, mas por favor também não atrapalhe! Desista de convencer todo mundo que a sua idéia é boa. Você não vai conseguir. Só começando e passando algum tempo é que você poderá mostrar, através do seu trabalho, como aquilo valeu a pena. Acima de tudo: não se preocupe, essas vozes opositoras vão caindo ao longo do tempo.

Apóie e dê crédito também aos outros projetos da escola: caminhada ecológica, grupo de dança, grupo de teatro, ONGs,... pois assim como o seu, todos eles são importantes! Faça como acima, se não quiser ajudar, também não atrapalhe.

Fique de olho também na parte dos educadores que dizem que a Olimpíada de Matemática é um processo excludente. **NÃO É!** Onde já se viu tamanha tolice, me perdoem as palavras! É claro que alguns alunos vão se dar melhor que outros, mas isso é muito natural. Obviamente estes outros serão muito bons em outras áreas, talvez artes, música, esportes... basta que lhes sejam dadas as oportunidades. É isso que a Olimpíada de Matemática, entre outras coisas, faz: dá oportunidade aos alunos para desenvolverem seu potencial.

Os educadores que pensam na Olimpíada de Matemática como fator de diferenciação social e exclusão são os mesmos que desejam que os alunos sejam tratados como iguais: sem oportunidade e nem perspecticas para nenhum.

Vamos mudar esse quadro. Vamos dar chances, sonhos e rumos a quem quiser segui-los. Que bom se isso pudesse ser feito em todos os ramos, não só em matemática!

2.8 O que eu (professor) ganharei com isso?

Os professores que participarem do projeto de Olimpíada de Matemática da escola só têm a ganhar. Um grande presente(!?) que eu considero é a mudança da sua rotina, pois agora você vai ter que preparar novas aulas, com nível de dificuldade maior do que o da sala de aula comum.

Certamente será mais difícil no começo, mas podem ter certeza que é muito recompensador. As aulas de olimpíada não precisam ser tão formais e rígidas como as aulas do horário de classe. Com isso, o professor se aproxima mais dos alunos e se torna realmente amigo deles. Ao longo do tempo a aula vai se tornando cada vez mais um bate-papo divertido entre amantes de matemática.

Outro bônus que eu aponto é que você, professor, vai enriquecer ainda mais seu conhecimento matemático. Ao preparar e ministrar sua aulas de olimpíada, certamente você vai se deparar com coisas novas, e vai também aprender bastante. Todos nós temos algo a aprender: os alunos conosco e nós com eles.

2.9 O que meus alunos ganharão com isso?

Os alunos que participarem terão ainda mais recompensas. Já disse anteriormente que a olimpíada fará com que o aluno estimule seu raciocínio e isso vai possibilitar um desenvolvimento educacional melhor, não só em matemática, como também nas outras áreas.

Além disso, na olimpíada se faz muitos amigos. Pessoas de outras escolas, até de outros estados, com interesses parecidos. Se algum deles tiver o prazer de se classificar na OBM, por exemplo, e vir a participar de um encontro como a Semana Olímpica, será uma experiência inesquecível para o garoto. Garanto que ele será estimulado em 100% para continuar estudando.

A Olimpíada de Matemática tende a crescer no país, e isto passa a ser também uma carta de recomendação para o estudante adiante. Premiações na Olimpíada serão importantes diferenciais na vida acadêmica, quando o aluno for concorrer a bolsas na universidade. Não só a bolsas, mas também a qualquer tipo de emprego. Um diploma de olimpíada, assim como um diploma de curso de inglês ou informática, passa a fazer parte do currículo do aluno.

Aqui no Ceará, este ano, os 363 alunos classificados na Olimpíada de Matemática da Escola Pública estão recebendo bolsas mensais no valor de $R\$72,00$. Já pensou o quanto isso significa para famílias carentes? É o governo tomando uma iniciativa pioneira, louvável, de premiar quem estuda. Esses alunos estão ainda recebendo treinamento em matemática e certamente no futuro difundirão seus conhecimentos e estarão aqui para falar dos benefícios que a matemática lhes trouxe.

2.10 Montando uma mini-biblioteca

Com o passar do tempo e afirmação do projeto de olimpíada na escola, é importante a implantação de uma minibiblioteca de matemática. Esta pode ser apenas uma estante na biblioteca da escola, ou um armário na sala do professor, não importa.

O que importa é que livros como os que foram citados acima (e por que não também o material didático usado nas aulas?) sejam disponibilizados para os alunos. A escola não precisa adquirir todos os livros de uma vez, basta comprar 1 ou 2 por mês, que em 3 anos sua minibiblioteca vai estar excelente!

O acesso a ela pode ser apenas às pessoas interessadas na olimpíada, através de carteirinha, chave do armário, etc, ou se preferirem a qualquer pessoa do colégio. Também não precisa dizer que um cuidado com os livros é essencial. O rendimento dos alunos vai melhorar consideravelmente se eles puderem, de vez em quando levar um livrinho para casa...

2.11 Contratempos que podem acontecer

Tudo bem. Você já iniciou seu projeto, têm alunos assíduos em várias turmas de olimpíada, competindo a nível municipal, estadual e nacional. Já venceu a rejeição inicial de alguns alunos e cabeças da direção. O que pode dar de errado agora?

Eu diria que sua base já está sólida. Agora é só tocar pra frente, tomando cuidado com possíveis contratempos. Vou chamar a atenção para dois possíveis acontecimentos.

É natural que você tenha turmas melhores que outras, mas nem por isso concentre toda a sua atenção em uma turma só. Esteja sempre olhando a formação dos alunos que vêm a seguir. É importante o fluxo contínuo, ou seja, formar bem os alunos da 8a série, os da 7a, os da 6a, os da 5a. Pois no outro ano tudo recomeça.

Ocorreu na escola onde trabalhei aqui em Fortaleza. Tínhamos uma turma muito boa, com uns 10 alunos excelentes, diversas vezes premiados. Todos os professores queriam dar aula para esses caras e meio que esqueciam os demais. Resultado: quando essas turma concluiu o colégio, havia só 1 estudante de olimpíada na turma da série anterior. Fez-se um hiato, que só conseguimos reparar 1 ou dois anos depois. Desde então trabalhamos com atenção para com todas as séries.

Outro aspecto relevante é sempre conscientizar seus alunos que a matemática que eles aprendem na olimpíada é diferente da matemática da sala de aula. Dizer aos alunos que eles não devem esnobar colegas ou professores. Humildade sempre. Na maioria dos casos, os alunos nem pensam em esnobar alguém (a não ser seu irmão mais novo...), mas de vez em quando aparecem uns espertinhos, aí você deve baixar a bola deles.

2.12 Como dar continuidade ao processo?

Já foi dito algo sobre isso anteriormente. Sobre a atenção para com todas as turmas, para que não haja buracos. Sobre a minibiblioteca. Esses são alguns fatores importantes na continuidade do processo.

É aconselhável que os professores se reúnam de vez em quando, para avaliar o progresso dos seus estudantes e os rumos a serem tomados. Divisão dos conteúdos entre os professores também é muito importante. Para que cada um saiba suas obrigações e seus objetivos.

Outros tópicos relevantes para dar prosseguimento ao seu projeto olímpico são: o estímulo constante aos seus alunos e professores, e também o contato com a SBM, OBM e universidades. Estes serão discutidos em separado nas seções seguintes.

2.13 Estímulo constante aos seus alunos

Chegamos a um tópico crucial. Como manter seus alunos estimulados?

O próprio clima de amizade presente na aula de olimpíada já é um bom estímulo para os garotos. Vale também de vez em quando distribuir uns prêmios, fazer umas gincanas na sala de aula, sempre promovendo a competição matemática saudável entre eles.

A minibiblioteca e o acesso à Internet são sem dúvida armas poderosas no estímulo a seus alunos. Através destas o estudante se sentirá cada vez mais seguro para pesquisar e com isso passará rapidamente a desenvolver seu conhecimento matemático por conta própria! Com o passar do tempo, eles (os alunos) vão começar a participar das competições de matemática. A OBM e a Olimpíada Estadual talvez sejam difíceis no começo e é provável que voce não veja seus alunos se classificarem na primeira vez. Nada de desânimo! Uma boa conversa com eles, para que eles possam assimilar o revés, vai cair bem.

Seria interessante que a escola organizasse uma olimpíada interna, fazendo uma festinha e congregando pais, alunos e professores. Distribua várias medalhas e prêmios, assim os garotos vão ficar felizes...(seus pais também!!!).

Você pode também conversar com outros professores da sua cidade, e montar uma olimpíada do seu município. Competindo na esfera municipal, todos os alunos terão mais chances de premiação.

Trabalhando nessas competições menores, eles vão se sentir cada vez mais seguros e capazes para concorrer a nível estadual e nacional. E o mais importante, estudarão sempre com mais dedicação. Assim você estará no caminho certo.

2.14 Estreitando os laços com SBM e as universidades

É bastante recomendado que o professor se associe à SBM, pois isso garante uma série de vantagens: descontos para comprar livros, para receber a Revista do Professor de Matemática, para participar de eventos. A SBM, através da OBM é a principal apoiadora da Olimpíada de Matemática no nosso país, estimulando os alunos através de listas de discussão via internet e da revista Eureka. É também a SBM/OBM que contribui com parte da verba destinada para a realização das competições regionais, que vêm crescendo ao longo do tempo. Hoje em dia, a maioria dos estados brasileiros têm sua própria Olimpíada de Matemática.

Além disso, o contato com a Universidade também deve ser estreito, pois não esqueçamos que esta deve ser o objetivo para os nossos alunos. É importante que os professores do ensino médio e fundamental possam trocar idéías com os mestres e doutores do ensino superior e ter acesso às bibliotecas (isso é legal!!). Com o passar do tempo, a universidade pode criar programas de verão para jovens interessados na olimpíada, como já é feito no Rio e no Ceará, por exemplo. Há jovens talentos que, no IMPA(RJ), iniciam seus estudos de mestrado, e em seguida doutorado, ainda adolescentes e se tornam excelentes matemáticos. Não tenha dúvida que a universidade vai dar muito apoio a esses jovens talentos, e eles só terão a agradecer.

Capítulo 3

Listas de Exercícios

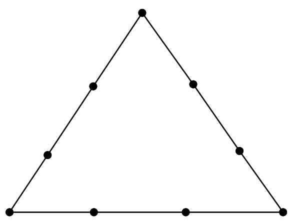
Este capítulo foi idealizado com o objetivo de mostrar mais alguns problemas do interessante mundo novo da Matemática. São 10 listas, cada uma com 5 problemas, recomendadas para alunos e professores iniciantes. Você pode usá-las como bem entender com seus pupilos. Uma dica: passe uma lista como essas (4 ou 5 problemas) uma vez por semana para eles.

Estes são problemas que cobrem os mais variados tópicos de matemática para um aluno iniciante. Existe uma certa ordem de dificuldade nas listas. Você verá que os problemas se tornam cada vez mais difíceis (mas só um pouquinho...). Boa sorte!

Lista 1

▶ **Problema 1**

Colocar em cada um dos pontos marcados sobre os lados do triângulo os números de 1 a 9, de modo que a soma dos quatro números colocados sobre cada lado seja a mesma.



▶ **Problema 2**

Um pai tem 40 anos e a soma das idades de seus três filhos é 22 anos. Dentro de quantos anos a idade do pai será a soma das idades dos filhos?

▶ **Problema 3**

Em um ano não bissexto, qual é o dia do meio? (Isto é, aquele cujo número de dias anteriores a ele é igual ao número de dias posteriores a ele)

▶ **Problema 4**

Temos três caixas (em fila) e três frutas: um abacaxi, uma banana e um cajá. Cada caixa contém uma fruta e sabe-se que:

- A caixa verde está à esquerda da caixa azul.
- A caixa vermelha está à direita da banana.

- O cajá está à direita da caixa vermelha.

Qual fruta está em qual caixa?

▸ Problema 5

Raul e Cida formam um estranho casal. Raul mente às 4a's, 5a's e 6a's feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Cida mente aos domingos, 2a's e 3a's feiras, dizendo a verdade nos outro dias. Certo dia ambos declaram: amanhã é dia de mentir. Em que dia foi feita esta declaração? (Olimpíada Carioca/93)

Lista 2

▸ Problema 6

Bruce Willis se meteu numa tremenda enrascada: está em uma fonte, na qual está armada uma bomba que vai explodir em alguns minutos. Se ele tentar sair da fonte, tudo vai pelos ares... mas ele tem uma chance: conectada à bomba existe uma balança, e esta balança desarma a bomba quando se põem exatamente 4 litros de água sobre ela. Bruce Willis tem 2 recipientes: um com capacidade para 3 litros e outro com capacidade para 5 litros, como ele deve fazer para sair vivo dessa fria? (baseado numa cena do filme "Duro de matar III").

▸ Problema 7

Bruno falou: "Antes de ontem eu tinha 10 anos, mas completarei 13 ano que vem". É possível que Bruno esteja falando a verdade?

▸ Problema 8

Augusto possui uma grande quantidade de $0's, 1's, 3's, 4's, 5's, 6's, 7's, 8's$ e $9's$, mas dispõe somente de vinte e dois $2's$. Até que página ele poderá numerar as páginas de seu novo livro? (Olimpíada Carioca - 94)

▸ Problema 9

Um crime é cometido por uma pessoa e há quatro suspeitos: André, Eduardo, Rafael e João. Interrogados, eles fazem as seguintes declarações:

1. André: Eduardo é o culpado.
2. Eduardo: João é o culpado.
3. Rafael: Eu não sou culpado.
4. João: Eduardo mente quando diz que eu sou culpado.

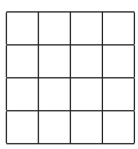
Sabendo que apenas um dos quatro disse a verdade, quem é o culpado?

▸ Problema 10

(i) Mostre como dispor os números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ nas casas de um quadrado 3×3 para formar um quadrado mágico, ou seja, para que a soma dos números nas linhas, colunas e diagonais seja a mesma.

(ii) Prove que em todo quadrado mágico o número da casa central deve ser o 5.

(iii) Você seria capaz de pôr os números de 1 a 16 (sem repetição) em um quadrado 4×4 de modo a formar um quadrado mágico? Lembre-se que a soma dos números em cada linha, coluna e nas duas diagonais deve ser igual.



Dica absurdamente boa: Tente primeiro mostrar que a soma comum (de cada linha, coluna ou diagonal) deve ser 34.

Lista 3

▸ **Problema 11**

Sobre uma mesa há 21 garrafas de guaraná, das quais 7 estão cheias, 7 estão vazias e 7 estão cheias até a metade. Reparta-as entre três garotos de modo que os três recebam a mesma quantidade de garrafas e de guaraná.
Obs: Não vale derramar o guaraná de uma garrafa em outra.

▸ **Problema 12**

No barril A há 100 litros de água e no barril B há 100 litros de álcool. Retira-se 1 litro de água de A e coloca-se em B. Em seguida retira-se 1 litro da mistura de B e coloca-se em A. No final das operações, há mais água no álcool ou mais álcool na água?

▸ **Problema 13**

Chamam-se palíndromos os números inteiros positivos que não se alteram quando é invertida a ordem de seus algarismos (por exemplo: $383, 4224, 74847...$). Qual é o número total de palíndromos de cinco algarismos?

▸ **Problema 14**

(OBM/98) Pintam-se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem 10 centímetros. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em 1000 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 centímetro. Determine:

(a) o número de cubinhos que não possuem nenhuma face pintada de preto.

(b) o número de cubinhos que possuem uma única face pintada de preto.

(c) o número de cubinhos que possuem exatamente duas faces pintadas de preto.

(d) o número de cubinhos que possuem três faces pintadas de preto.

▸ **Problema 15**

Considere a sequência $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5...)$, cujos termos são os inteiros consecutivos em ordem crescente, e na qual o inteiro n ocorre n vezes. Ache o resto da divisão por 5 do 1999° termo. (Olimpíada Carioca - 93)

Lista 4

▸ **Problema 16**

Escrevemos a lista dos números naturais $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...$ Qual é o dígito que ocupa o 2004° lugar?

▸ **Problema 17**

Na soma $IRA + ARO + ORA$, as letras I, R, O, A representam os dígitos $1, 3, 8$ e 9 (dígitos distintos para letras distintas, não necessariamente nessa ordem).

(a) Qual é a maior soma possível?

(b) E a menor?

▸ **Problema 18**

(a) Uma peça é colocada em uma extremidade (do lado de fora) de uma fila 1×21 de casas. Cada jogador na sua vez pode mover a peça uma ou duas casas para a frente (são dois jogadores). Ganha o jogador que atingir a última casa do tabuleiro. Quem possui a estratégia vencedora?

(b) Generalize para o caso de o tabuleiro ser $1 \times N$.

▶ **Problema 19**

(Rioplatense/2003) Algumas pessoas vão a uma pizzaria. Cada pessoa que está faminta quer comer 6 ou 7 pedaços de pizza, e as outras querem comer 2 ou 3 pedaços. Cada pizza possui 12 pedaços. Sabe-se que 4 pizzas não são suficientes para satisfazer a todos, mas com 5 pizzas sobrariam alguns pedaços. Quantas pessoas foram à pizzaria? Quantas delas estavam famintas?

▶ **Problema 20**

Temos uma cartolina em forma de triângulo equilátero.

(a) Mostre como dividir a cartolina em 22 triângulos equiláteros menores (não necessariamente do mesmo tamanho).

(b) Mostre como dividir a cartolina em 17 triângulos equiláteros menores (não necessariamente todos do mesmo tamanho).

Lista 5

▶ **Problema 21**

Quando $10^{94} - 94$ é desenvolvido, qual é a soma de seus algarismos?

▶ **Problema 22**

Daniel trocou de lugar as teclas da calculadora de Onofre da seguinte maneira:

Calculadora de Onofre

7	8	9
4	5	6
1	2	3
	0	

Calculadora com as teclas trocadas

3	6	9
2	5	8
1	4	7
	0	

Sem notar que as teclas foram trocadas, Onofre multiplica dois números de dois dígitos cada um e aparece como resultado 1722. Sabe-se que o verdadeiro resultado seria um número de três algarismos. Que números Onofre queria multiplicar ?

▶ **Problema 23**

Em um triângulo isósceles ABC ($AB = AC$, $\angle BAC = 30°$) marcamos um ponto Q no lado AB e um ponto P na mediana AD, de modo que $PC = PQ$ ($Q \neq B$).
Ache $\angle PQC$.

▶ **Problema 24**

(Bielorússia/01) Encontre o menor número possível de elementos do conjunto:

$$\{1, 2, 3, ..., 28\}$$

que devem ser deletados para que o produto dos restantes seja um quadrado perfeito.

▸ **Problema 25**

Vanessa escreve oito números em cada um dos vértices de um cubo. Em cada aresta escreve a soma dos dois números dos vértices adjacentes, e em cada face escreve a soma dos quatro números das arestas adjacentes. É possível que a soma de todos os números escritos no cubo seja 2004?

Lista 6

▸ **Problema 26**

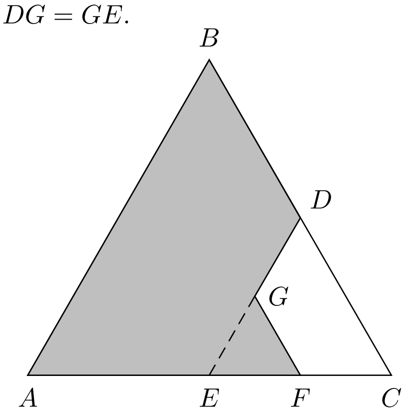
Três amigos planejam uma viagem ao campo de Rodrigo. Evaldo diz : "Para chegarmos demoraremos no máximo 5 horas".
Andréa então fala: "Garanto que chegamos em mais de 5 horas".
Raul diz: "A viagem dura mais de 2 horas".
Se apenas um deles tem razão, qual deles é? O que se pode dizer sobre a duração da viagem?

▸ **Problema 27**

Usando os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9, cada um uma única vez, forme 3 números de três algarismos de modo que o segundo número seja o dobro do primeiro e que o terceiro seja o triplo do primeiro.

▸ **Problema 28**

(OBM/99) Na figura, os triângulos ABC e EGF são equiláteros. O perímetro do triângulo ABC é 132cm e, além disso, $AE = EC$, $BD = DC$, $EF = FC$ e $DG = GE$.



(a) Qual é o perímetro da área sombreada?

(b) Que fração da área do triângulo ABC representa a área sombreada?

▸ **Problema 29**

O retângulo da figura foi dividido em 9 retângulos menores, cujas áreas estão indicadas:

	2	1
4	3	
5		X

Determine o valor da área X.

▸ **Problema 30**

Zé guarda suas figurinhas em envelopes. Algumas figurinhas são quadradas e outras redondas. Em cada envelope ele põe apenas figurinhas do mesmo tipo. Os envelopes continham $9, 15, 16, 17, 26$ e 34 figurinhas. Ontem Zé deu um envelope de presente para seu irmão e agora o número de figurinhas redondas que tem é o dobro do número de figurinhas quadradas. Quantas figurinhas havia no envelope que ele deu? Qual o tipo de figurinha que há em cada envelope restante?

Lista 7

▶ **Problema 31**

Uma caixa contém 100 bolas, das quais 30 são vermelhas, 30 são azuis, 30 são verdes e das 10 restantes, algumas são pretas e outras são brancas. Qual o número mínimo de bolas que devem ser retiradas da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de que entre elas existem pelo menos 10 bolas da mesma cor? E para garantir que existem pelo menos 15 bolas da mesma cor?

▶ **Problema 32**

Quantos números de 100 até 999 possuem todos os seus algarismos distintos e ordenados de maneira crescente?

▶ **Problema 33**

As diagonais AC e BD do quadrilátero $ABCD$ se encontram no ponto O. Os perímetros dos triângulos ABC e ABD são iguais, assim como os perímetros dos triângulos ACD e BCD. Prove que $AO = BO$.

▶ **Problema 34**

São construídos exteriormente ao $\triangle ABC$, os triângulos equiláteros ABM, BCN, ACP. Prove que $NA = BP = CM$.

▶ **Problema 35**

Uma escola tem exatamente 100 armários e 100 estudantes. No primeiro dia de aula os estudantes encontraram-se fora do prédio e concordaram no seguinte plano: o primeiro estudante entrará na escola e abrirá todos os armários. O segundo aluno entrará e fechará todos os armários com números pares $(2, 4, 6, 8...)$. O terceiro aluno, então, inverterá o que tiver sido feito a cada 3 armários $(3, 6, 9...)$, o que significa: ele abrirá se o armário estiver fechado ou fechará se o armário estiver aberto. O quarto aluno inverterá o que tiver sido feito a cada 4 armários $(4, 8, 12, ...)$ e assim por diante. Após todos os alunos terem entrado e realizado suas tarefas, quais armários estarão abertos? (Olimpíada Cearense/96)

Lista 8

▶ **Problema 36**

(Cone Sul/92) Achar um número inteiro positivo n de dois algarismos de maneira que se colocarmos um 2 à esquerda de n, e um 1 à direita de n, o número resultante seja igual a $33n$.

▶ **Problema 37**

Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$ e $A = 36°$. Traçamos a bissetriz de B que corta AC em D. Traçamos a bissetriz de $\angle BDC$ que corta BC em P. Marcamos agora um ponto R sobre a **reta** BC de modo que B seja o ponto médio do segmento PR. Explique porque os segmentos RD e AP têm a mesma medida.

▶ **Problema 38**

Em um dado triângulo ABC, a altura AK, a mediana CM e a bissetriz BH se encontram em um ponto O, e além disso $AO = BO$. Prove que o triângulo ABC é equilátero.

▶ **Problema 39**

(Rússia/2001) É possível colocarmos números inteiros positivos nas casas de um tabuleiro 9×2004 de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam primos? Justifique sua resposta.

▸ **Problema 40**

(Seletiva Rioplatense/2001) Em um torneio de futebol participaram os times A, B, C e D. Cada time enfrentou cada um dos outros três exatamente um vez. A tabela abaixo mostra o número de pontos ganhos, o número de gols pró e o número de gols contra de cada equipe:

Clube	PG	Gp	Gc
A	7	2	0
B	4	5	2
C	4	2	2
D	1	2	7

Cada equipe recebeu 3 pontos em caso de vitória, 1 ponto ao empatar e 0 ponto em caso de derrota.
Sabendo que o jogo $C \times D$ teve pelo menos um gol, determine o placar do jogo $B \times D$. Considere todos os possíveis casos.

Lista 9

▸ **Problema 41**

Ache o último algarismo de $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 99^2$.

▸ **Problema 42**

(Seletiva Rioplatense/04) É possível distribuirmos os números $1, 2, 3, ..., 30$ nas casas de um tabuleiro 5×6 de modo que:

(a) A soma dos números de cada coluna seja igual?

(b) A soma dos números de cada linha seja igual?

▸ **Problema 43**

Um trapézio $ABCD$ de bases BC e AD com $BC < AD$ é tal que $2.AB = CD$ e $\angle BAD + \angle CDA = 120°$. Determine os ângulos do trapézio $ABCD$.

▸ **Problema 44**

(Rioplatense/97) Há 1997 números escritos ao redor de uma circunferência, dos quais 1996 são zeros e um deles é 1. A única operação permitida é escolher um número e modificar seus dois vizinhos (de 0 para 1 e de 1 para 0).

(a) Demonstre que é possível, usando várias vezes a operação permitida, chegar a ter todos os números iguais a 1.

(b) Decida se com 1998 números, sendo 1997 zeros e um 1, é possível chegar ao resultado da parte anterior.

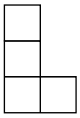
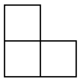
▸ **Problema 45**

Fernando, Larissa e Gulherme estão formando uma roda e se divertindo com o seguinte jogo. Um deles escolhe um número e o diz em voz alta, a pessoa que estiver à sua esquerda o divide pelo seu maior divisor primo e diz o resultado em voz alta e assim sucessivamente. Ganha a pessoa que disser em voz alta o número 1, e o jogo termina.
Fernando escolheu um número maior que 50 e menor que 100 e ganhou.
Na partida seguinte, Guilherme escolheu o número seguinte ao escolhido por Fernando e também ganhou.
Determinar todos os números que possam ter sido escolhidos por Fernando.

Lista 10

▶ **Problema 46**

Onofre, também conhecido como Paladino, deseja cobrir um tabuleiro 7×7, e para isso dispõe de dois tipos de peças mostradas abaixo:

 (A)  (B)

Onofre quer usar a menor quantidade possível de peças do tipo (B). Quantas peças do tipo (B) nosso herói vai utilizar? Dê exemplo de uma cobertura usando o mínimo possível de peças tipo (B).

▶ **Problema 47**

As diagonais AC e BD de um quadrilátero convexo $ABCD$ se cortam em E de forma que $\dfrac{CE}{AC} = \dfrac{3}{7}$ e $\dfrac{DE}{BD} = \dfrac{4}{9}$. Sejam P e Q pontos que dividem o segmento BE em três partes iguais, com P entre B e Q, e R o ponto médio do segmento AE. Calcule:

$$\frac{area(APQR)}{area(ABCD)}$$

▶ **Problema 48**

(Rússia/98) Um número de quatro dígitos é escrito no quadro-negro. As operações permitidas são: adicionar 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 9), ou subtrair 1 de dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 0). É possível obtermos 2002 a partir de 1234 realizando algumas operações?

▶ **Problema 49**

(Seletiva Rioplatense/04) Em cada casa de um tabuleiro 8×8 escrevemos um número inteiro. Sabe-se que para cada casa, a soma dos seus vizinhos é 1. Encontre a soma de todos os números do tabuleiro.

Nota: Consideramos vizinhas casas com um lado em comum.

▶ **Problema 50**

(Rioplatense/2003) Os 5 melhores times de futebol da América participaram de um torneio, onde todos jogaram contra todos uma única vez. Da forma usual, em caso de vitória o time ganha 3 pontos, em caso de empate cada time ganha 1 ponto e em caso de derrota o time ganha 0 ponto. Após o final do torneio foi confeccionada uma tabela especial para a Olimpíada Rioplatense, que mostra o total de pontos de cada time (Pt), o número de vitórias (V), a quantidade de gols a favor (Gp) e a quantidade de gols contra (Gc), onde é claro faltam alguns dados:

Clube	PG	V	Gp	Gc
Fortaleza	10	3	4	0
River Plate	8	2	7	1
Santos	5	1	2	?
Boca Juniors	3	1	1	4
Cruzeiro	?	?	0	6

(a) Complete a tabela acima indicando o total de pontos ganhos e o total de vitórias do Cruzeiro, e o número de gols contra do Santos.

(b) Construa toda a tabela de jogos do campeonato indicando, com justificativa, os placares de todas as partidas.

Capítulo 4

Soluções

■ **Solução 1**

Temos várias soluções para este problema. Aqui vão duas delas (começando em um vértice do triângulo e percorrendo os pontos no sentido anti-horário):

- $1, 6, 8, 2, 7, 5, 3, 4, 9$
- $7, 3, 5, 8, 4, 2, 9, 6, 1$

Obs: Seria interssante investigar mais de perto este problema e saber por exemplo quais valores pode assumir a soma S comum dos lados (no primeiro exmplo $S = 17$ e no segundo $S = 23$). Para isso veja as dicas oferecidas no problema do quadrado mágico (Problema 10). ■

■ **Solução 2**

Digamos que as idades dos filhos sejam a, b, c. Temos portanto:

$$a + b + c = 22$$

Daqui a x anos, as idades dos filhos serão $a + x, b + x$ e $c + x$ enquanto a idade do pai será $40 + x$. Queremos que:

$$\begin{aligned}
(a + x) + (b + x) + (c + x) &= 40 + x \\
\iff (a + b + c) + 3x &= 40 + x \\
\iff 22 + 2x &= 40 \\
\iff x &= 9
\end{aligned}$$

A resposta é portanto 9 anos. ■

■ **Solução 3**

Um ano não bissexto tem 365 dias. O dia do meio portanto seria o 183°. Basta então contarmos:

- Janeiro : 31 dias
- Fevereiro: 28 dias
- Março: 31 dias
- Abril: 30 dias
- Maio : 31 dias
- Junho: 30 dias

Até aqui temos 181 dias. Logo o 183° dia será 02 de Julho. ∎

■ **Solução 4**

Observe as duas últimas afirmações: O cajá está à direia da caixa vermelha, que por sua vez está à direita da banana. Logo devem estar dispostos assim:

banana cx vermelha cajá

Concluímos portanto que o abacaxi deve estar na caixa vermelha, e que a caixa da banana é a verde, pois na primeira afirmação ele diz que a caixa verde está à esquerda da azul. A configuração deve ser então:

cx verde (banana) cx vermelha (abacaxi) cx azul (cajá)

∎

■ **Solução 5**

Neste problema você poderia fazer uma análise do seguinte tipo:

- Se Raul estiver falando a verdade, amanhã será realmente um dia de mentir. Nesse caso o dia da afirmação é uma sexta-feira. Se Raul estiver mentindo, então amanhã será dia de falar a verdade. Nesse caso a afirmação deve ter sido feita numa terça-feira.

- Se Cida estiver falando a verdade, amanhã será realmente um dia de mentir, e o dia em que foi feita a frimação é uma terça. Caso Cida esteja mentindo, amanhã será um dia de falar a verdade, e a afirmação deve ter sido feita num sábado.

Como os dois disseram a frase no mesmo dia, concluímos que a resposta é terça-feira. ∎

■ **Solução 6**

Nosso herói pode usar a seguinte estratégia para obter os 4 litros exatos. Digamos que o balde A tenha capacidade para 5l, enquanto o balde B tem capacidade para 3l.

1. Encher o balde A

2. Derramar 3l no balde de B, sobrando 2l em A.

3. Seque então o balde B e derrame os 2l restantes de A em B. Agora B ficou com 2l e A ficou vazio.

4. Encha novamente o balde A e em seguida complete 1 litro que falta no balde B. Sobrarão 4 litros exatos no balde A.

Obs: Você pode experimentar outras variações deste problema, como por exemplo com baldes de 7l e 5l obter 4 litros... ∎

■ **Solução 7**

É possível sim! Imagine que ele esteja falando a frase no dia 1° de janeiro e que seu aniversário seja no dia 31 de dezembro. ∎

■ **Solução 8**

Para numerar as páginas de 1 até 99 ele vai usar 20 vezes o algarismo 2, dez vezes na casa das unidades: $2, 12, 22, ..., 92$ e dez vezes na casa das dezenas: $20, 21, 22, ..., 29$. Os próximos dois $2's$ que vão aparecer serão nas páginas 102 e 112. Agora cuidado! Ele poderá continuar numerando as páginas até a 119, que é a resposta. ∎

■ **Solução 9**

O enunciado diz que só há um cara que está falando a verdade. Fixemos as atenções em Eduardo e João. Para Eduardo temos duas possibilidades: ou ele mente, ou ele fala a verdade.

Se Eduardo mente, então João estará falando a verdade. Como só pode haver um falando a verdade, esta pessoa só poderá ser Eduardo ou João. De modo que temos então certeza que André e Rafael mentiram. Como Rafael mentiu, ele deve ser o culpado.

Então Eduardo deve estar mentindo também, e a pessoa que falou a verdade foi João.

Resposta: Rafael ■

■ Solução 10

O item (a) e o item (b) deste problema já foram resolvidos no capítulo 2. Vamos então resolver o item (c). Vamos inicialmente pôr letras $a, b, c, ..., p$ para representar os números $1, 2, ..., 16$ em alguma ordem:

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

Como a soma de cada linha deve ser igual, chamemos esta soma comum de S. Montando as equações teremos:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= S \\ e+f+g+h &= S \\ i+j+k+l &= S \\ m+n+o+p &= S \end{aligned}$$

Somando estas quatro expressões obtemos:

$$\begin{aligned} a+b+c+...+p &= 4S \\ 1+2+...+16 &= 4S \\ 136 &= 4S \\ S &= 34 \end{aligned}$$

Há algumas maneiras diferentes de montar este tabuleiro, porém não vejo nenhum método prático para tal construção. Apresento a vocês três soluções descobertas por alunos do Projeto Numeratizar:

4	6	9	15
13	11	8	2
16	10	5	3
1	7	12	14

10	1	12	11
2	15	6	16
13	8	5	3
9	7	4	14

1	14	15	4
10	8	5	11
7	9	12	6
16	3	2	13

■

■ Solução 11

Observe que se considerarmos cada garrafa com 1 litro, haverá $10,5$ litros a serem repartidos, o que dá $3,5$ litros para cada garoto. Apresentamos aqui dois modos diferentes de se fazer a partilha:

1° **modo**:

- Garoto A: 3 cheias, 1 metade e 3 vazias.
- Garoto B: 3 cheias, 1 metade e 3 vazias.
- Garoto C: 1 cheia, 5 metades e 1 vazia.

2° **modo**:

- Garoto A: 2 cheias, 3 metades e 2 vazias.

- Garoto B: 2 cheias, 3 metades e 2 vazias.
- Garoto C: 3 cheias, 1 metade e 3 vazias.

■

■ Solução 12

Quando retiramos 1 litro de A para B, o barril B fica com 101 litros, numa mistura de 100 litros de álcool e 1 litro de água. Ao realizar o segundo passo, vamos tirar 1 litro da mistura de B, digamos que venha x de álcool e $(1-x)$ de água. Teremos então ao final:

- Barril A: $(100-x)$ água e x álcool.
- Barril B: $(100-x)$ álcool e x água.

Conclusão: Há a mesma quantidade de álcool no barril A que de água no barril B. ■

■ Solução 13

Queremos montar um número de 5 algarismos palíndromo:

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

Usaremos o princípio fundamental da contagem. Para a primeira posição (mais à esquerda) temos 9 possibilidades (exclui-se o ZERO). Uma vez escolhida esta posição, temos 1 possibilidade para a última posição (deve ser um dígito igual ao primeiro). Temos 10 escolhas para o dígito da segunda posição. Uma vez escolhida esta segunda posição, novamente temos 1 escolha para a quarta. E por último temos 10 possibilidades para o dígito central.

No total temos: $9 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 = 900$ números. ■

■ Solução 14

Vamos reslver este problems de trás para a frente.
(d) Os cubinhos que têm três faces pretas são exatamente os 8 cubinhos das esquinas.

(c) Os cubinhos que têm exatamente duas faces pretas estão numa aresta do cubão inicial, mas que não são esquinas. Temos 8 cubinhos desse tipo em cada aresta, e 12 arestas, totalizando 96 destes cubinhos.

(b)Os cubinhos que têm exatamente uma face preta estão nas faces do cubão inicial, mas não estão nas arestas. Em cada face, temos 64 desse cubinhos. Como são 6 faces, temos 384 destes cubinhos.

(a) Os cubinhos com nenhuma face preta são os restantes: $1000-8-96-384=512$. ■

■ Solução 15

Observe que:

- O 1 é o 1° termo.
- O último 2 é o $(1+2)^\circ$ termo.
- O último 3 é o $(1+2+3)^\circ$ termo.

Seguindo neste raciocínio, o último número k é o:

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

termo. Vamos procurar k de forma que isso chegue perto de 1999. Encontramos $k=62$. O último 62 será o 1953° termo da sequência. Agora virão 63 termos iguais a 63. Em particular o 1999° termo será um 63, e o resto da divisão deste cara por 5 é 3. ■

■ Solução 16

Faremos a contagem do seguinte modo:

- De 1 a 9: São 9 dígitos usados.
- De 10 a 99: São 90 números, cada um com 2 dígitos, ou seja $90 \times 2 = 180$ dígitos utilizados.
- De 100 a 999: São 900 números, cada um com 3 dígitos, ou seja $900 \times 3 = 2700$ dígitos utilizados.

Como estamos procurando pelo 2004° dígito escrito, este deve aparecer em um número de três algarismos. Vamos calcular quantos dígitos escrevemos até o número de três algarismos x. De 100 a x temos $(x - 100 + 1) \times 3 = 3x - 297$ algarismo escritos, e no total de 1 até x temos:

$$9 + 180 + (3x - 297) = 3x - 108$$

algarismos escritos. Fazendo:

$$3x - 108 = 2004 \Rightarrow 3x = 2112 \Rightarrow x = 704$$

vemos que o 2004° algarismo escrito é o 4 do número 704. ■

■ Solução 17

A única coisa que precisamos para resolver este problema é conhecer a representação em base 10 dos números!! Veja:

$$\begin{aligned} & IRA + ARO + ORA = \\ = \; & (100I + 10R + A) + (100A + 10R + O) + (100O + 10R + A) \\ = \; & 102A + 101O + 100I + 30R \quad (*) \end{aligned}$$

(a) Se queremos deixar esta soma maior possível, devemos substituir os maiores números para as letras que têm maiores coeficientes na expressão $(*)$. Ou seja $A = 9$; $O = 8$; $I = 3$; $R = 1$. A maior soma será então:

$$S = 102.9 + 101.8 + 100.3 + 30.1 = 2056$$

(b) Para o cálculo da menor soma, o raciocínio é inverso. Devemos fazer $A = 1$; $O = 3$; $I = 8$; $R = 9$. A menor soma é portanto:

$$S = 102.1 + 101.3 + 100.8 + 30.9 = 1475$$

■

■ Solução 18

(a) Quem possui a estratégia vencedora é o segundo jogador, ou seja ele pode sempre vencer independente de como o primeiro jogue. Sua estratégia será a seguinte: ele deve jogar sempre o oposto do primeiro. Assim se o 1° jogador move a ficha 1 casa para a freente, o 2° deve movê-la 2 casas. E se o 1° move a ficha 2 casas para a frente, o 2° deve movê-la 1 casa apenas.

Dessa forma o 2° jogador vai completando o tabuleiro de 3 em 3 casas e ele (2° jogador) alcançará as casas múltiplos de 3: $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...$

(b) No caso geral de um tabuleiro $1 \times N$, se o N for múltiplo de 3, o 2° jogador vence com a estratégia apontada acima.

Caso N não seja múltiplo de 3, quem tem a estratégia para vencer é o 1° jogador. Na sua primeira jogada ele deve deixar a quantidade de casas restantes múltiplo de 3 (ou seja se o resto de N por 3 for 1, ele joga 1 casa, e se o resto de N por 3 for 2 ele joga 2 casas). Em seguida o 1° jogador só deve usar a estratégia acima de sempre completar 3 casas.

Obs: Você pode experimentar variações deste jogo, onde as jogadas permitidas são: mover a ficha $1, 2, 3, ...,$ ou k casas para a frente. Nesse caso a estratégia vencedora tem a ver com a divisão por $(k+1)$ e a dica é sempre completar $(k+1)$ casas após o movimento do adversário. ■

■ Solução 19

Digamos que haja x pessoas famintas e y pessoas normais. Como 4 pizzas não são suficientes, nem que cada pessoa coma o seu mínimo de pedaços, dará certo. Então devemos ter:

$$6x + 2y > 48$$

Por outro lado, com 5 pizzas sobrariam pedaços. Isso quer dizer que mesmo que cada pessoa coma seu máximo de pedaços, o total de 60 pedaços será atingido, ou seja:

$$7x + 3y < 60$$

Vamos agora testar os possíveis casos. Da segunda equação obtemos que $x < 9$. Daí:

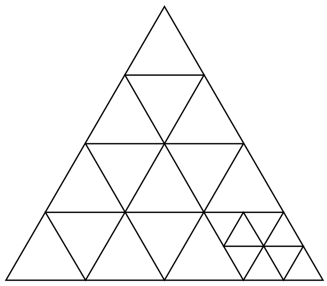
- $x = 8$, devemos ter $y = 1$ que funciona!!!!
- $x = 7$, pela primeira equação $y \geq 4$, o que não funcionaria na segunda.
- $x = 6$, pela primeira equação, obtemos $y \geq 7$, o que não funcionaria na segunda
- os casos $x = 5, 4, 3, 2, 1$ também não funcionarão.

Concluímos portanto que 9 pessoas foram à pizzaria, das quais 8 estavam famintas. ∎

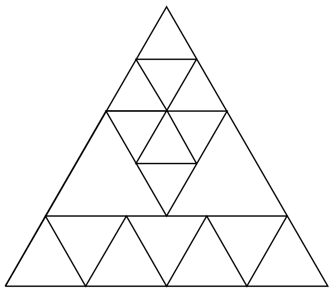
■ Solução 20

Observe que ao tomarmos um triângulo equilátero e ligarmos seus pontos médios estamos dividindo este em 4 triângulos equiláteros menores. Se o triângulo equilátero original já faz parte de uma divisão, estaremos aumentando a quantidade de triângulos da divisão em 3.

(a) Usando a dica acima, ao construirmos uma divisão do triângulo original em 1 triângulo (ele mesmo!), conseguiremos dividi-lo em 22 triangulos menores, já que $22 = 3.7 + 1$. Veja a figura abaixo:



(b) Para construirmos uma divisão em 17 triangulinhos, primeiro conseguimos dividir em 8 e depois acrescentamos mais 9 com a dica acima. A figura final pode ficar assim:



■ Solução 21

Desenvolvendo temos:

$$10^{94} - 94 = \underbrace{1000...00}_{94 \quad \text{zeros}} - 94 = \underbrace{999..99}_{92 \quad \text{noves}} 06$$

A soma dos algarismo é portanto:

$$(92 \times 9) + 6 = 834$$

■

■ Solução 22

Veja que $1722 = 2 \times 3 \times 7 \times 41$. As únicas possibilidades de multiplicarmos dois números de dois algarismos para obter 1722 são:

$$1722 = 42 \times 41 = 82 \times 21$$

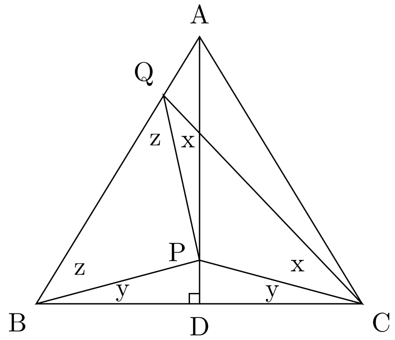
Vamos agora ver quais são os verdadeiros resultados destas multiplicações:

- 42×41: O verdadeiro resultado seria $24 \times 21 = 504$.
- 82×21: O verdadeiro resultado seria $64 \times 41 = 2624$.

Como é dito no enunciado que o verdadeiro resultado seria um número de três algarismos, concluímos que Onofre queria multiplicar os números 24 e 21. ■

■ Solução 23

Veja a figura abaixo:



Como o $\triangle ABC$ é isósceles, sabemos que AD também é mediatriz, logo $PB = PC = PQ$. Veja os ângulos marcados na figura. No $\triangle BQC$ temos que:

$$2x + 2y + 2z = 180° \Rightarrow x + y + z = 90°$$

E daí concluímos que:

$$\angle PQC = x = 90° - (y + z) = 90° - 75° = 15°$$

■

■ Solução 24

Fatorando em primos cada número do conjunto $\{1, 2, ..., 28\}$ e multiplicando todos esses números, encontramos:

$$P = 2^{25}.3^{13}.5^{6}.7^{4}.11^{2}.13^{2}.17.19.23$$

Para que o produto seja um quadrado perfeito todos os expoentes devem ser **pares**. Devemos portanto tirar os números $17, 19, 23$ e ainda um fator 2 e um fator 3 que pode ser feito de uma vez só tirando o número 6. A reposta é portanto 4 números. ■

■ Solução 25

Sejam a, b, c, d, e, f, g, h os oito números escritos nos vértices do cubo. Seja S a soma total dos números dos vértices, das arestas e das faces do cubo. Nas 3 arestas incidentes no vértice a aparece uma parcela a em cada uma. Nas três faces incidentes no vértice a aparece uma parcela $2a$ em cada uma. O mesmo vale para os outros números, de modo que:

$$S = 10(a + b + c + d + e + f + g + h)$$

Faça uma figura bem direitinho para verificar isto!! Veja que a soma total é múltipla de 10, e portanto não pode ser igual a 2004. ■

■ Solução 26

Temos três possibilidades a analisar:

- Se viagem dura no máximo 2 horas: Nesse caso apenas Evaldo teria razão.
- Se a viagem dura mais que 2 horas e no máximo 5 horas: Nesse caso Evaldo e Raul teriam razão.
- Se a viagem dura mais que 5 horas: Nesse caso Andréa e Raul teriam razão.

Como é dito no enunciado que apenas um deles tem razão, concluímos que a primeira das três possibilidades acima é a verdadeira. ■

■ Solução 27

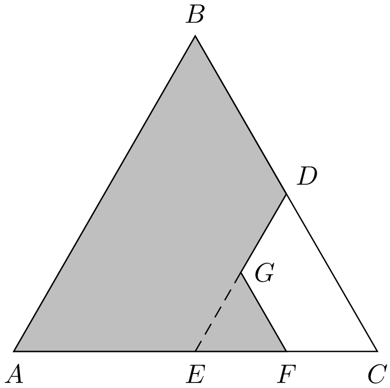
Duas possibilidades são:

- $327, 654$ e 981.
- $273, 546$ e 819.

■

■ Solução 28

Observando a figura do enunciado vemos que:



(a) O lado do $\triangle ABC$ mede 44. Veja agora que $AE = 22$, $EF = 11$, $FG = 11$, $GD = 11$, $BD = 22$. O perímetro da área sombreada é portanto:

$$BA + AE + EF + FG + GD + DB = 44 + 22 + 11 + 11 + 11 + 22 = 121cm$$

(b) A área $ABDE$ vale $\frac{3}{4}$ da área do $\triangle ABC$. Já a área do $\triangle EGF$ vale $\frac{1}{4}$ da área do $\triangle EDC$ que por sua vez vale $\frac{1}{4}$ da área do $\triangle ABC$. Logo a razão entre a área sombreada e a área do $\triangle ABC$ é:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

■

■ Solução 29

Se dois retângulos têm mesma base, a razão entre suas áreas é a mesma rezão entre suas alturas. Do mesmo modo, se dois retângulos têm mesma altura, a razão entre suas áreas é a mesma razão entre suas bases. Veja figura abaixo:

c	b	a	
	2	1	d
4	3		e
5		X	f

O retângulo de área 3 tem mesma base que o retângulo de área 2 (base b), assim:

$$\frac{e}{d} = \frac{3}{2} \Rightarrow e = \frac{3d}{2}$$

Veja agora que o retângulo de área 5 tem mesma base que o retângulo de área 4 (base c), e com isso:

$$\frac{f}{e} = \frac{5}{4} \Rightarrow f = \frac{5e}{4} = \frac{15d}{8}$$

Lembrando que $ad = 1$, a área procurada vale:

$$X = af = \frac{15}{8}ad = \frac{15}{8}$$

■

■ Solução 30

Compreendendo bem o enunciado do problema, devemos retirar um pacote para que os pacotes restantes possam ser divididos em dois grupos um com o dobro de figurinhas do outro. Digamos que o pacote retirado tenha x figurinhas e que os pacotes restantes foram divididos em dois grupos: um com y figurinhas e outro com $2y$ figurinhas. O total de figurinhas inicialmente é:

$$S = 9 + 15 + 16 + 17 + 26 + 34 = 117$$

Quando tiramos x devemos ter:

$$117 - x = y + 2y = 3y \quad (*)$$

Assim, x deve ser múltiplo de 3. Temos duas possibilidades:

- Se $x = 9$: Daí, pela equação $(*)$ concluímos que $y = 36$. Porém não há modo de formarmos um grupo de 36 figurinhas com pacotes de $15, 16, 17, 26$ e 34.
- Se $x = 15$: Pela equação $(*)$ descobrimos que $y = 34$. Agora sim! O único modo de formarmos um grupo com 34 figurinhas dentre as restantes é considerar o pacote de 34 como um grupo só, e os pacotes de $9, 16, 17, 26$ como o outro grupo.

Conclusão: O pacote que Zé deu ao seu irmão tinha 15 figurinhas. Dos pacotes restantes o de 34 é de figurinhas quadradas, enquanto os pacotes de $9, 16, 17, 26$ são de figurinhas redondas. ■

■ Solução 31

(a) Se tirarmos 37 bolas, pode ser que venham 9 vermelhas, 9 azuis, 9 verdes, e 10 pretas e brancas (nem todas pretas, nem todas brancas) de modo que não teríamos 10 bolas da mesma cor. Agora se tirarmos 38 bolas, nem que venham as 10 pretas/brancas, teremos pelo menos 28 dentre vermelhas, azuis e verdes, o que já garante a existência de 10 da mesma cor.

(b) Seguindo o mesmo raciocínio acima, devemos tirar 53 bolas para garantir que há 15 de uma mesma cor. ■

■ Solução 32

Primeiro vamos contar os números bons que começam com 1:

- Começam por 12: 7 números.
- Começam por 13: 6 números.
- Começam por 14: 5 números.
- Começam por 15: 4 números.
- Começam por 16: 3 números.
- Começam por 17: 2 números.
- Começam por 18: 1 números.

De modo que começando com 1 temos:

$$7+6+5+4+3+2+1=\frac{7.8}{2}=28$$

Seguindo o mesmo raciocínio temos:

- Começando por 2: $6+5+4+3+2+1=21$ números.
- Começando por 3: $5+4+3+2+1=15$ números.
- Começando por 4: $4+3+2+1=10$ números.
- Começando por 5: $3+2+1=6$ números.
- Começando por 6: $2+1=3$ números.
- Começando por 7: 1 número.

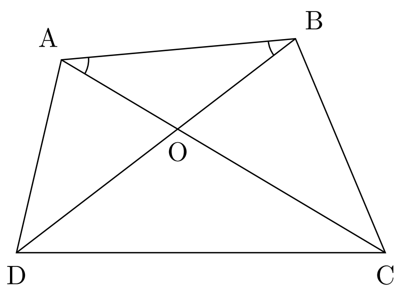
No total temos portanto:

$$28+21+15+10+6+3+1=84 \text{ números}$$

■

■ Solução 33

Observe a figura abaixo:



Como os perímetros dos triângulos ABC e ABD são iguais temos:

$$\begin{aligned} AB+BC+AC &= AB+AD+BD \\ \Rightarrow AC+BC &= AD+BD \quad (*) \end{aligned}$$

Agora, como os perímetros dos triângulos ACD e BCD também são iguais:

$$\begin{aligned} AD+CD+AC &= BC+CD+BD \\ \Rightarrow AD+AC &= BC+BD \quad (**) \end{aligned}$$

Somando $(*)+(**)$ temos:

$$AC+BC+AD+AC=AD+BD+BC+BD \Rightarrow AC=BD$$

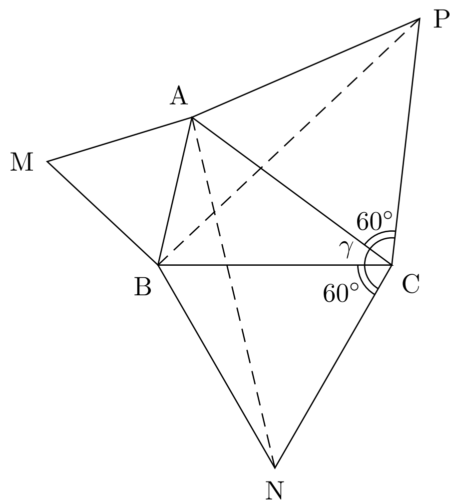
Com isso, olhando para $(*)$ concluímos também que:

$$BC = AD$$

Por fim, perceba que os triângulos ABD e ABC são congruentes pelo caso LLL e com isso os ângulos $\angle CAB$ e $\angle DBA$ são iguais, o que torna o triângulo AOB isósceles e portanto $AO = BO$. ∎

■ Solução 34

Atenção para a figurinha:



O que você deve perceber acima é a congruência entre os triângulos ACN e BCP, pelo caso LAL:

$$\begin{cases} AC &= CP \\ \angle ACN &= \angle BCP = 60° + \gamma \\ CN &= BC \end{cases}$$

Com isso provamos que os lados opostos ao ângulo de $(60° + \gamma)$ nos dois triângulos são iguais, ou seja $AN = BP$. De modo análogo podemos provar que $AN = CM$, e com isso:

$$AN = BP = CM$$

∎

■ Solução 35

Observe que ao final do processo, cada armário d foi movimentado uma quantidade $N(d)$ vezes, onde $N(d)$ é o número de divisores positivos de d. Os armários que ficaram abertos são aqueles que foram operados uma quantidade **ímpar** de vezes, ou seja, aqueles números que possuem uma quantidade ímpar de divisores. É bem conhecidada a fórmula para calcular a quantidade de divisores positivos de um número fatorado em primos $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$:

$$N(d) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$$

Para que $N(d)$ seja ímpar, é necessário portanto que cada α_i seja par. Isso faz de d um quadrado perfeito. Logo os armários buscados são os de número:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$$

∎

■ Solução 36

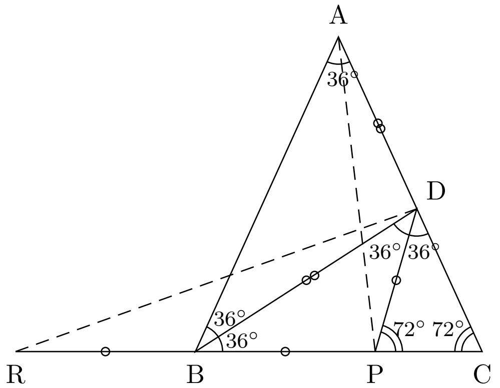
Digamos que o nosso número seja $n = \overline{ab} = 10a + b$. O que é dito no enunciado traduz-se para:

$$\begin{aligned} \overline{2ab1} &= 33 \times \overline{ab} \\ \iff 2000 + 100a + 10b + 1 &= 33(10a + b) \\ \iff 2001 &= 230a + 23b = 23(10a + b) \\ \iff 87 &= 10a + b = n \end{aligned}$$

A resposta é portanto $n = 87$. ■

■ Solução 37

Começamos desenhando uma boa figurinha:



O triângulo ABC é isósceles, logo $\angle CBA = \angle BCA = 72°$. Como BD é bissetriz temos que $\angle DBA = \angle DBC = 36°$. Isso faz com que o triângulo ABD seja isósceles e $AD = BD$ (marcados na figura com duas bolinhas).

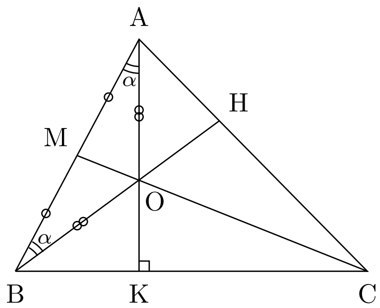
Além disso, observe que os ângulos $\angle BDP = \angle PDC = 36°$. Com isso o triângulo BDP também é isósceles e temos $BP = DP$. Por construção $RB = BP$ (marcamos estes segmentos com uma bolinha na figura). Observe então a congruência dos triângulos ADP e DBR pelo caso LAL:

$$\begin{cases} AD = BD \\ \angle ADP = \angle DBR = 144° \\ DP = BR \end{cases}$$

Com isso, os lados opostos aos ângulos de $144°$ nesses triângulos são iguais, ou seja $AP = RD$. ■

■ Solução 38

Observe a figura:



Sabemos que o $\triangle ABO$ é isósceles, logo:

$$\angle ABO = \angle BAO = \alpha$$

Como BH é bissetriz, concluímos que $\angle OBC = \alpha$. Olhando então para a soma dos ângulos no $\triangle ABK$ chegamos a:

$$3\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 30°$$

Além disso, no $\triangle ABO$, OM é mediana e portanto é altura também, já que este triângulo é isósceles. Daí $\angle CMA = 90°$ e CM passa a ser mediana e altura no triângulo ABC, o que torna este triângulo também isósceles, com $\angle CAB = \angle ABC = 60°$. O $\triangle ABC$ deve ser portanto equilátero. ∎

■ Solução 39

Suponha que seja possível fazer tal construção. Sejam $L_1, L_2, ..., L_9$ as somas dos números de cada uma das 9 linhas, e $C_1, C_2, C_3, ..., C_{2004}$ as somas dos números de cada uma das 2004 colunas.

Como cada L_i e C_j são primos, estes devem ser números **ímpares** (já que são soma de pelo menos nove inteiros positivos). Seja S a soma de todos os números do tabuleiro. Por um lado teríamos:

$$S = L_1 + L_2 + ... + L_9$$

donde concluímos que S é ímpar, pois é soma de 9 ímpares. Por outro lado:

$$S = C_1 + C_2 + ... + C_{2004}$$

e daqui concluiríamos que S é par, o que é um absurdo.

Logo tal construção não é possível. ∎

■ Solução 40

Inicialmente observe que cada time jogou três vezes. Reproduzimos aqui a tabela do campeonato:

Clube	PG	Gp	Gc
A	7	2	0
B	4	5	2
C	4	2	2
D	1	2	7

Observando as pontuações acima podemos concluir que:

- A obteve 2 vitórias e 1 empate.
- B obteve 1 vitória, 1 empate e 1 derrota.
- C obteve 1 vitória, 1 empate e 1 derrota.
- D obteve 1 empate e 2 derrotas.

Como o time A só fez 2 gols, suas duas vitórias devem ter sido por 1×0, e seu empate por 0×0. Temos três casos a considerar, dependendo contra quem foi o empate de A:

1° **caso**: A empata com B

Nesse caso já sabemos que:

$$\begin{array}{ccc} A & 0 \times 0 & B \\ A & 1 \times 0 & C \\ A & 1 \times 0 & D \end{array}$$

O outro empate do campeonato deve ter sido $C \times D$. Assim C deve ter vencido B, enquanto B vence D. Como é dito no enunciado, o empate $C \times D$ é com gols. Pode ter sido 1×1 ou 2×2 já que C só faz dois gols. Porém, se tivesse sido 2×2, C já levaria 3 gols (pois levou 1 de A) o que não pode. Logo, chegamos a mais um resultado:

$$C \;\; 1 \times 1 \;\; D$$

Com isso sobra 1 gol apenas para C fazer em sua vitória, donde concluímos que:

$$B \;\; 0 \times 1 \;\; C$$

E contando os gols que faltam, chegamos a:

$$B \;\; 5 \times 1 \;\; D$$

2° **caso**: A empata com C

Nessa opção sabemos que:

$$\begin{array}{ccc} A & 1 \times 0 & B \\ A & 0 \times 0 & C \\ A & 1 \times 0 & D \end{array}$$

Nesse caso $B \times D$ deve ser empate, como B precisa de 1 vitória, B deve ter vencido C, e com isso C deve ter vencido D. Agora observe que B deve marcar 5 gols. Para vencer C, B não pode marcar mais de 2 gols, pois C só leva 2 gols. Assim B deve fazer pelo menos 3 gols em D, mas aí esse jogo não poderia ser empate já que D só marca 2 gols. Este caso não tem solução.

3° **caso**: A empata com D

Agora teremos a seguinte situação:

$$\begin{array}{ccc} A & 1 \times 0 & B \\ A & 1 \times 0 & C \\ A & 0 \times 0 & D \end{array}$$

O outro empate deve ser então entre B e C. Como D já empatou com A, D deve perder para B e C. Como D não leva gol de A, deve levar seus 7 gols de B e C. Porém B e C marcam juntos exatamente 7 gols, que devem então ser disparados todos em D. Achamos portanto o resultado do empate $B \times C$:

$$B \;\; 0 \times 0 \;\; C$$

Como B deve levar 2 gols, será 1 do A e 1 do D, e portanto temos os placares que faltam:

$$B \;\; 5 \times 1 \;\; D$$

$$C \;\; 2 \times 1 \;\; D$$

Curiosamente, a resposta é a mesma para os dois possíveis casos: $B \;\; 5 \times 1 \;\; D$. ■

■ Solução 41

Denotaremos por $..x$ um número que acaba no algarismo x. Veja que a sequência dos últimos algarismos se repete de dez em dez:

$$\begin{aligned} N &\equiv (..1 + ..4 + ..9 + ..6 + ..5 + ..6 + ..9 + ..4 + ..1 + ..0) + (..1 + ..4 + ... \\ \Rightarrow N &\equiv 10(..1 + ..4 + ..9 + ..6 + ..5 + ..6 + ..9 + ..4 + ..1 + ..0) \\ \Rightarrow N &\equiv 10.(..5) \equiv 0 \end{aligned}$$

Vemos portanto que N acaba em ZERO.

Solução Alternativa: Usando a fórmula para o cálculo da soma dos quadrados temos:

$$N = \frac{99.100.199}{6} \equiv 33.50.199 \equiv 0 \, (mod \, 10)$$

■

■ Solução 42

Veja que a soma de todos os números do tabuleiro é:

$$S = 1 + 2 + ... + 30 = \frac{30.31}{2} = 15.31 = 465$$

(a) Como 465 não é divisível por 6 (quantidade de colunas) **não** é possível distribuir os números no tabuleiro para que a soma de cada coluna seja igual.

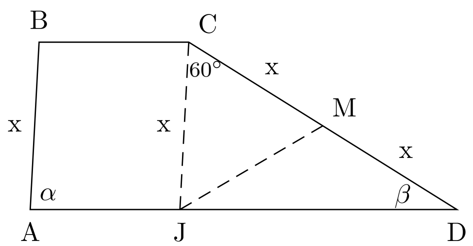
(b) Em contrapartida, como $465 = 93 \times 5$, já temos um indício de que é possível fazer a distribuição para deixar a soma de cada uma das 5 linhas igual (a 93). O exemplo abaixo mostra que de fato isto é possível:

1	30	2	29	3	28
4	27	5	26	6	25
7	24	8	23	9	22
10	21	11	20	12	19
13	18	14	17	15	16

■

■ Solução 43

Observe a figura abaixo:



Por C traçamos uma paralela ao lado AB encontrando AD em J. Veja que:

$$\angle CJD + \angle CDJ = \angle BAD + \angle CDA = 120° \Rightarrow \angle JCD = 60°$$

Seja M o ponto médio de CD. O $\triangle JCM$ é isósceles, pois $JC = CM = x$, e tem ângulo do vértice $C = 60°$. Com isso o $\triangle JCM$ deve ser equilátero e teremos $JM = x$. Observe que:

$$JM = CM = DM = x$$

Concluímos portanto que o $\triangle CJD$ deve ser retângulo em J, o que faz com que $\alpha = 90°$ e $\beta = 30°$. Os outros ângulos dos trapézio são $\angle BCD = 150°$ e $\angle CBA = 90°$. ■

■ Solução 44

(a) Considere um bloco de 4 zeros consecutivos na circunferência:

$$\underline{0000}$$

Se realizarmos a operação no segundo zero do bloco, modificaremos seus dois vizinhos e ficaremos com:

$$\underline{1010}$$

Agora se realizarmos a operação na terceira posição (o 1) modificaremos seus dois vizinhos para ficar com:

$$\underline{1111}$$

Conseguimos então com estes dois passos trocar quatro zeros consecutivos por quatro $1's$. Basta então dividir os 1996 zeros em 499 blocos de 4 zeros consecutivos e aplicar o esquema acima.

(b) Com 1997 zeros e um 1 inicialmente, não é possível transformar tudo em 1. Para provar isso considere a soma S dos números da circunferência. Vejamos o que pode acontecer com S quando realizamos uma operação:

- Se a casa operada tem dois vizinhos 0: Nesse caso S se transformará em $S+2$.
- Se a casa operada tem um vizinho 0 e outro vizinho 1: A soma S permanecerá constante.
- Se a casa operada tiver dois vizinhos 1: A soma S diminuirá para $S-2$.

Veja que quando realizamos a operação, a paridade de S não muda. Inicialmente $S=1$. Logo, não podemos ter ao final todos os números iguais a 1, pois nesse caso teríamos $S=1998$, que seria uma contradição. ∎

■ Solução 45

Observe que o jogador que diz o número inicial N ganha o jogo quando a soma dos expoentes da fatoração em primos de N é múltipla de 3 (pois a cada rodada um fator primo sai, é como se um expoente baixasse 1). A maneira mais na raça de se fazer este problema é então é fatorar todos os números entre 50 e 100 e ver os pares de números consecutivos cujas somas dos expoentes sejam múltiplas de 3. Após esta análise de casos, encontramos as respostas (o primeiro número é o que foi dito por Fernando):

$$\begin{array}{ccc} 63 = 3^2.7 & \text{e} & 64 = 2^6 \\ 75 = 3.5^2 & \text{e} & 76 = 2^2.19 \\ 98 = 2.7^2 & \text{e} & 99 = 3^2.11 \end{array}$$

∎

■ Solução 46

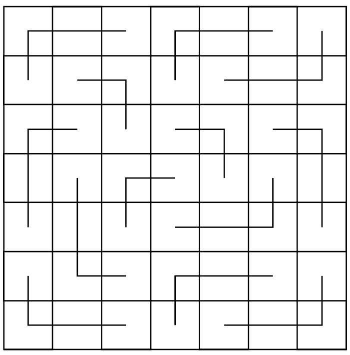
Digamos que Onofre vá utilizar x peças do tipo (A) e y peças do tipo (B) para cobrir o tabuleiro. Cada peça do tipo (A) tem 4 casas enquanto cada peça do tipo (B) tem 3 casas. O tabuleiro 7×7 tem 49 casas, o que nos permite montar a seguinte equação:

$$4x + 3y = 49$$

Como y deve ser o menor possível, testemos estes valores:

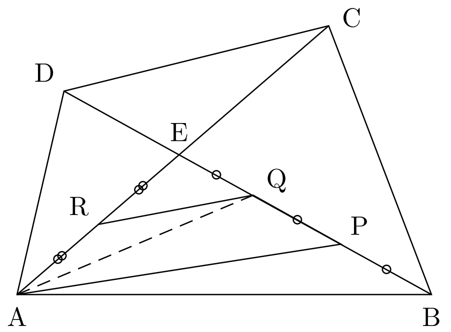
- $y = 0 \Rightarrow 4x = 49, \quad$ Absurdo!
- $y = 1 \Rightarrow 4x = 46, \quad$ Absurdo!
- $y = 2 \Rightarrow 4x = 43, \quad$ Absurdo!
- $y = 3 \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10$

Pelo que foi visto acima, não podemos cobrir o tabuleiro usando apenas $0, 1$ ou 2 peças (B). O menor valor possível seria 3, como mostra o exemplo abaixo:



■ Solução 47

Para resolver este problema usaremos o seguinte resultado: se dois triângulos têm mesma altura, a razão entre suas áreas é a mesma razão entre suas bases. Em particular quando um triângulo é dividido em dois por meio de uma ceviana, a razão entre suas áreas é a mesma entre suas bases. Veja a figura abaixo:



Vamos denotar áreas por parênteses. Chamemos $(AEB) = x$. Como $\dfrac{DE}{BD} = \dfrac{4}{9}$, temos que $\dfrac{DE}{BE} = \dfrac{4}{5}$. Assim:

$$\frac{DE}{BE} = \frac{4}{5} = \frac{(ADE)}{(AEB)}$$

donde concluímos que $(ADE) = \dfrac{4x}{5}$. Pelo mesmo raciocínio, temos:

$$\frac{(CEB)}{(AEB)} = \frac{CE}{AE} = \frac{3}{4} \Rightarrow (CEB) = \frac{3x}{4}$$

Ainda de modo análogo:

$$\frac{(CED)}{(CEB)} = \frac{DE}{BE} = \frac{4}{5} \Rightarrow (CED) = \frac{4}{5}.\frac{3x}{4} = \frac{3x}{5}$$

Logo a área do quadrilátero $ABCD$ será:

$$\begin{aligned}(ABCD) &= (ABE) + (ADE) + (CEB) + (CED)\\ &= x + \frac{4x}{5} + \frac{3x}{4} + \frac{3x}{5}\\ &= \frac{63x}{20}\end{aligned}$$

Uma mediana divide um triângulo em duas partes de mesma área. Sabendo disso, como QR é mediana no $\triangle EQA$ e AP é mediana no $\triangle QAB$ temos:

$$(ERQ) = (RQA) \quad \text{e} \quad (QAP) = (PAB)$$

e isso claramente implica em:

$$(APRQ) = \frac{1}{2}(ABE) = \frac{x}{2}$$

A resposta para o nosso problema é portanto:

$$\frac{(APQR)}{(ABCD)} = \frac{x}{2}.\frac{20}{63x} = \frac{10}{63}$$

■

■ Solução 48

O que será que não muda em um número quando adicionamos ou subtraímos 1 unidade de dois dígitos vizinhos? Por meio desta operação veja que podemos estar somando ou subtraindo: $11, 110$ ou 1100 do número original. E o que estas parcelas têm todas em comum? São múltiplas de 11! Ou seja estamos sempre adicionando ou subtraindo um número múltiplo de 11 do número corrente, de modo que **o resto da divisão por 11 do número escrito no quadro não muda**.

Como começamos com 1234 que deixa resto 2 por 11, **não** podemos chegar a 2002 que deixa resto 0 por 11. ■

■ Solução 49

Observe as casas marcadas no tabuleiro abaixo:

	*	*			*	*	
*			*	*			*
*							*
		*			*		
		*			*		
*							*
*			*	*			*

Se olharmos para os vizinhos das casas marcadas acima, vemos que eles cobrem todo o tabuleiro e de maneira disjunta! Como a soma dos vizinhos de cada casa é 1, a soma total dos números do tabuleiro será igual ao número de casas marcadas, que é 20. ■

■ Solução 50

Reveja a tabela do campeonato:

Clube	PG	V	Gp	Gc
Fortaleza	10	3	4	0
River Plate	8	2	7	1
Santos	5	1	2	?
Boca Juniors	3	1	1	4
Cruzeiro	?	?	0	6

(a) Inicialmente veja que o total de gols marcados por todos os times deve ser igual ao total de gols sofridos por todos os times:

$$Gp = 4 + 7 + 2 + 1 + 0 = 0 + 1 + ? + 4 + 6 = Gc$$

Concluímos portanto que o Santos sofreu 3 gols.
O campeonato teve ao todo 10 jogos, como é indicado na tabela, 7 deles já acabaram com vitórias $(3 + 2 + 1 + 1)$. Veja ainda que Fortaleza teve 1 empate, River teve 2 empates e Santos teve 2 empates, o que somados já fornecem 5 empates, ou seja pelo menos 3 jogos acabaram empatados. Esses são os 3 jogos restantes. Logo o Cruzeiro teve 0 vitórias.
Vejamos agora o total de pontos do campeonato, houve 7 jogos com vitória (3 pontos cada) e 3 jogos empatados (2 pontos cada) o que dá um total de:

$$(7 \times 3) + (3 \times 2) = 27 \ \ pontos$$

Portanto o Cruzeiro deve ter feito 1 ponto.

(b) Vamos agora montar a tabela de jogos do campeonato. Fortaleza teve 3 vitórias e 1 empate. Esse empate deve ter sido com o River que também não perdeu (2 vitórias e 2 empates). Como o Fortaleza não sofreu gols, tiramos:

$$Fortaleza \ \ 0 \ \ x \ \ 0 \ \ River$$

Logo o Fortaleza venceu Santos, Boca e Cruzeiro. O Boca obteve apenas uma vitória que deve ter sido sobre o Cruzeiro (pois o jogo Boca x Cruzeiro não admite outro resultado). Sendo assim River e Santos vencem o Boca. Para o Santos restam 2 empates que são com River e Cruzeiro. O último jogo que é River e Cruzeiro acaba com vitória do River. Vamos agora aos placares.

O empate Cruzeiro x Santos foi sem gols, pois o Cruzeiro não marcou gols no campeonato:

$$Cruzeiro \ \ 0 \ \ x \ \ 0 \ \ Santos$$

Como o Boca marca só um gol no campeonato, este deve ser para consolidar sua vitória, daí:

$$Boca \ \ 1 \ \ x \ \ 0 \ \ Cruzeiro$$

O Fortaleza tem 4 gols para fazer 3 vitórias, logo duas delas serão 1 x 0 e outra será 2 x 0. Se a vitória contra o Santos fosse de 1 x 0, ao Santos sobrariam 2 gols pro e 2 gols contra para uma vitória e um empate o que não é possível. Logo:

$$Fortaleza \;\; 2 \;\; x \;\; 0 \;\; Santos$$

E ainda:

$$Fortaleza \;\; 1 \;\; x \;\; 0 \;\; Boca$$

$$Fortaleza \;\; 1 \;\; x \;\; 0 \;\; Cruzeiro$$

Resta ao Santos sofrer 1 gol, que deve ser para o River, já que o Boca não marca mais. Como o jogo Santos x River termina empatado devemos ter:

$$Santos \;\; 1 \;\; x \;\; 1 \;\; River$$

A vitória do Santos será então de:

$$Santos \;\; 1 \;\; x \;\; 0 \;\; Boca$$

Resta ao Boca levar 2 gols do River, e não fazer nenehum, logo:

$$River \;\; 2 \;\; x \;\; 0 \;\; Boca$$

Por fim, o River deu uma goleada no Cruzeiro, para completar seus gols pro:

$$River \;\; 4 \;\; x \;\; 0 \;\; Cruzeiro$$

■

Apêndice A

Sugestões de Conteúdo

Aqui vão então algumas sugestões para que você monte seu programa de ensino:

4a série

Carga horária proposta: 3h/aula por semana - curso de 40 semanas

1. Teoria dos conjuntos - 9h
2. Números inteiros (operações); Números fracionários; Expressões Numéricas - 12h
3. Divisores de um número; Números primos; Fatoração em primos; Método para encontrar divisores; Regras de divisibilidade; MDC; Algoritmo de Euclides; MMC - 24h
4. Frações II (mais problemas); Bases de Numeração; Dízimas Periódicas; Proporções, Regra de três - 24h
5. Equações, manipulações algébricas com uma variável; Sistemas de equações - 12h
6. Geometria plana: Ponto, reta, segmentos de reta; Sistema métrico decimal; Áreas de figuras planas e problemas; Volumes de sólidos, problemas - 21h
7. Aulas de problemas; Simulados - 18h

5a série

Carga horária proposta: 4h/aula por semana - curso de 40 semanas

Aritmética:

1. Teoria dos Conjuntos - 8h
2. Números inteiros e fracionários, expressões numéricas; Bases de Numeração e dízimas periódicas - 16h
3. Proporções e Regra de três - 10h
4. Divisores de um número, Números primos, Fatoração em primos, Método para encontrar divisores, Regras de divisibilidade, MDC, Algoritmo de Euclides, MMC - 22h
5. Equações com 1 variável e Sistemas de equações - 12h

Geometria:

1. Ponto, reta, segmento de reta, ângulos; Sistema métrico decimal; Áreas de figuras planas e problemas; Volumes de sólidos, problemas - 28h

2. Paralelismo e ângulos - 12h
3. Congruência de triângulos - 12h
4. Teorema de Pitágoras - 4h

Combinatória:

1. Introdução aos princípios da contagem - 12h
2. Princípio da casa e dos pombos, Lógica Matemática; Paridade, Jogos e Invariantes - 24h

6a série

Carga horária proposta: 4h/aula por semana - curso de 40 semanas

Aritmética

1. Teoria dos Conjuntos - 6h
2. Números inteiros e fracionários, expressões numéricas; Bases de Numeração e dízimas periódicas - 12h
3. Proporções e Regra de três - 6h
4. Equações com 1 variável e Sistemas de equações - 6h
5. Divisores de um número, Números primos, Fatoração em primos, Método para encontrar divisores, Regras de divisibilidade, MDC, Algoritmo de Euclides, MMC - 16h
6. Algoritmo da Divisão - 8h

Geometria(Bibliografia: Matemática Elementar, vol 9)

1. Introdução, segmento de reta; Ângulos; Revisão: Sistema Métrico, Áreas, Volumes - 12h
2. Triângulos, Congruência de triângulos, Desigualdades no triângulo - 12h
3. Paralelismo; Perpendicularidade - 12h
4. Quadriláteros Notáveis (8h); Circunferência, área e perímetro (4h); Pontos Notáveis no triângulo (8h) - 20h
5. Semelhança de triângulos e Teorema de Pitágoras - 10h

Combinatória-Álgebra

1. Introdução aos problemas de Olimpíada - 6h
2. Princípios da Contagem, Permutações, Combinações, Permutações Circulares - 14h
3. Noções de Álgebra: Produtos Notáveis, Raízes e Potências, Módulos, Racionalização de denominadores - 10h
4. Princípio da casa e dos pombos; Paridade; Jogos e Invariantes - 10h

7a série

Carga horária proposta: 4h/aula por semana - curso de 40 semanas

Álgebra

1. Introdução à Lógica Matemática - 4h

2. Produtos Notáveis e fatorações - 8h
3. Radiciação, Potenciação, Função Modular; Revisão: Equações do 1o grau, Sistemas de equações, Proporções, Regras de três, muitos e muitos problemas - 10h
4. Revisão: Bases de Numeração, Dízimas periódicas - 6h
5. Equações do 2o grau (tudo) e função quadrática - 10h
6. Progressões Aritméticas e Geométricas - 6h
7. Desigualdades entre as médias - (se der tempo)

Geometria (Bibliografia: Matemática Elementar, vol.9)

1. Revisão: Introdução, retas, segmentos de reta, ângulos; Revisão: Sistema métrico decimal, perímetros, áreas e volumes - 8h
2. Triângulos: Congruências e Desigualdades (8h); Paralelismo e Perpendicularidade (6h); Quadriláteros Notáveis (4h); Pontos notáveis no triângulo (6h) - 24h
3. Polígonos: Diagonais e ângulos (2h); Circunferência: Posições, ângulos, tangentes, quadriláteros inscritíveis (8h) - 10h
4. Teorema de Tales e Teorema da bissetriz (4h); Semelhança de triângulos, potência de ponto (6h); Triângulo retângulo: Relações Métricas e Teorema de Pitágoras (6h) - 16h

Aritmética - Combinatória

1. Revisão: Números inteiros, fracionários, radicais, potências, módulos, dízimas periódicas - 4h
2. Divisores de um número, Números primos, Fatoração em primos, Método para encontrar divisores, Regras de divisibilidade, MDC, Algoritmo de Euclides, MMC - 10h
3. Algoritmo da Divisão e Congruências (introdutório) (12h); Equações diofantinas (4h) - 16h
4. Princípios da Contagem, Permutações, Combinações e Permutações Circulares - 12h
5. Princípio da Indução - 6h
6. Paridade, Jogos e Invariantes, Princípio da Casa e dos Pombos - 10h

8a série

Carga horária proposta: 6h/aula por semana - curso de 40 semanas

Geometria

Bibliografia:

- Matemática Elementar, vol 9;
- Challenging Problems in Geometry, I.M. Yaglom
- Geometry Revisited, H.S.Coxeter

Programa:

1. Triângulos: Congruências e Desigualdades; Paralelismo e perpendicularidade - 16h
2. Quadriláteros Notáveis (4h); Pontos notáveis no triângulo (propriedades básicas); Teorema de Tales, Teorema da bissetriz, semelhança de triângulos (8h); Triângulos Retângulos e o teorema de Pitágoras (4h) - 16h

3. Circunferência: ângulos, tangentes, potência de ponto; Quadriláteros inscritíveis e o teorema de Ptolomeu - 14h
4. Teoremas de Ceva e Menelaus - 6h
5. Relações métricas no triângulo qualquer; Áreas; Lei dos senos e Trigonometria - 14h
6. Transformações Geométricas: Homotetia, Rotação, Reflexão, Translação - (opcional); O triângulo e seus círculos: triângulo órtico, triângulo medial, o incírculo e exincírculos, triângulo pedal, reta de Simpson, a reta de Euler e o círculo dos nove pontos - (opcional)

Álgebra

1. Produtos notáveis e fatorações - 8h
2. Potenciação, Radiciação, Racionalização, Radicais Duplos, Função Modular - 4h
3. Revisão de 1o grau: Proporções, Regra de três, bases de numeração, dízimas periódicas, sistemas de equações, muitos e muitos problemas - 8h
4. Equação do 2o grau e função quadrática - 10h
5. Inequações(4h); Progressões (4h); Desigualdades entre as médias (10h); Funções e Polinômios (8h) - 26h
6. Resolução de Exercícios - aulas restantes

Teoria dos Números

1. Divisores, números primos, fatoração em primos, regras de divisibilidade, MDC, Algoritmo de Euclides, MMC - 10h
2. Princípio da Indução - 6h
3. Algoritmo da divisão e congruências (6h); MDC e MMC (aprofundamento)(4h); Equações diofantinas (4h) - 14h
4. Números primos (6h); Função parte inteira (4h) - 10h
5. Congruências em Z (parte II) (6h); Ternos pitagóricos; Equações Diofantinas II (6h) - 12h
6. Teoermas de Fermat, Euler e Wilson - 6h
7. Teorema Chinês dos Restos (4h); A função phi de Euler (4h) - 8h
8. Resolução de exercícios - aulas restantes

Combinatória

1. Princípios da Contagem; Permutações e Permutações Circulares; Combinações; Combinações completas; Probabilidade - 16h aulas
2. Binômio de Newton, triângulo de Pascal e relação de Stifel (opcional)
3. O princípio da casa e dos pombos - 6h
4. O princípio da Inclusão - Exclusão (opcional)
5. Paridade; Jogos e Invariantes (10h); Teoria dos Grafos (8h); Seqüências recorrentes (8h) - 26h
6. Resolução de Problemas - aulas restantes

1o/2o anos

Carga horária proposta: 6h/aula por semana - curso de 40 semanas

Geometria

Bibliografia:

- Matemática Elementar, vol 9;
- Challenging Problems in Geometry, I.M. Yaglom
- Geometry Revisited, H.S.Coxeter

Programa:

1. Paralelismo e Perpendicularismo. Congruência de triângulos e desigualdade triangular - 8h
2. Semelhança de triângulos, teorema de Tales, teorema da bissetriz - 6h
3. Pontos Notáveis no triângulo (I) (4h); Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras. Relações métricas no triângulo qualquer, lei dos senos, lei dos cossenos, relação de Stewart, fórmulas de área (8h) - 12h
4. Quadriláteros Inscritíveis e o teorema de Ptolomeu; Teoremas de Ceva e Menelaus - 8h
5. Os círculos do triângulo: incírculo, exincírculos e circuncírculo (4h); Pontos Notáveis (II): o triângulo órtico, o triângulo medial, a reta de Euler e o círculo dos nove pontos, triângulo pedal, reta de Simpson, simétricos do ortocentro e outras propriedades; Teorema de Napoleão (10h) - 18h
6. Geometria com Trigonometria - 8h
7. Transformações Geométricas: Homotetia, Rotação, Reflexão, Translação - 8h
8. Geometria Analítica para Olimpíada (opcional)

Álgebra

1. Produtos Notáveis e Fatorações - 6h
2. Equação do 2o grau e Função quadrática - 6h
3. Inequações; Sequências e Progressões - 6h
4. Polinômios, relações de Girard (6h); Números Complexos e raízes da unidade (6h) - 12h
5. Matrizes, determinantes e sistema lineares - 4h
6. Desigualdades (I) : Médias, Cauchy-Schwarz (8h); Desigualdades (II): Rearranjo, Chebychev e outras elementares (opcional)- 8h
7. Equações Funcionais - 12h
8. Resolução de problemas - aulas restantes

Teoria dos Números

1. Princípio da Indução - 6h
2. Algoritmo da Divisão e Congruências (8h); MDC, MMC e Divisibilidade (6h) - 14h
3. Equações diofantinas (I) - 6h
4. Números primos; Função parte inteira - 6h
5. Ternos Pitagóricos; Teoremas de Euler-Fermat, Wilson e do Resto Chinês; A função phi de Euler - 12h
6. Equações Diofantinas (II) - 8h
7. Resolução de Problemas- aulas restantes

Combinatória

1. Contagem: princípio fundamental, permutações, combinações, permutações circulares e combinações completas; Probabilidade - 12h

2. Princípio da Inclusão- Exclusão; Números binomiais, triângulo de Pascal e Binômio de Newton - 8h
3. Princípio da Casa e dos Pombos - 6h
4. Contagem dupla (8h); Sequências recorrentes (8h) - 16h
5. Teoria dos Grafos (I) (10h); Jogos e Invariantes (14h) - 24h
6. Aulas restantes: Exercícios