TEORIA ANALÍTICA DOS NÚMEROS

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

Lista 1 - Entrega: 18/01/2018

Problema 1. Prove que se f é uma função aritmética tal que $f(1) \neq 0$, então f possui uma inversa com respeito à convolução de Dirichlet.

Problema 2. Seja $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ o subconjunto das funções aritméticas multiplicativas. Prove que $(\mathcal{M}, *)$ é um subgrupo de $(\mathcal{A}^{\times}, *)$.

Problema 3. Prove que existe uma função aritmética s tal que $s * s(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Dica: Tome s multiplicativa tal que $s(p^m) = \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}$.

Problema 4. Mostre que

$$c_1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{6}{5}c_1\,,$$

onde $\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ e $c_1 = \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 30}{30} = 0.9212920....$

Dica: Considere

$$L(x) - L(x/2) - L(x/3) - L(x/5) + L(x/30)$$

como na prova da estimativa de Tchebychev, onde $L(x) = \sum_{n\leq x} \log n$.

Problema 5. Prove que existem constantes c_1 e c_2 tais que, para $2 \leq x$ temos:

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

e

$$c_2 = \lim_{x\to\infty} \left\{ -\sum_{p\leq x} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} \right\}.$$

Conclua que:

$$\prod_{p\leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-c_1-c_2}}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

Problema 6. Prove que $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$.

Date: 9 de janeiro de 2018.
2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.
Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 7. Sejam $n \mapsto a(n)$ e $n \mapsto b(n)$ funções aritméticas tais que as séries de Dirichlet correspondentes

$$A(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a(n)n^{-s} \quad ; \quad B(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b(n)n^{-s}$$

tenham abcissas de convergência absoluta $\sigma_a(A) < \infty$ e $\sigma_a(B) < \infty$, respectivamente. Seja $n \mapsto c(n)$ a convolução de Dirichlet $c(n) = a * b(n)$. Mostre que a série de Dirichlet

$$C(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c(n)n^{-s}$$

possui abcissa de convergência absoluta $\sigma_a(C) < \infty$ e

$$\sigma_a(C) \leq \max\{\sigma_a(A), \sigma_A(B)\}.$$

Além disso, mostre que a identidade

$$A(s)B(s) = C(s)$$

vale no semiplano $\{s \in \mathbb{C};\ \max\{\sigma_a(A), \sigma_A(B)\} < \sigma\}$.

Problema 8. Seja $n \mapsto f(n)$ uma função aritmética multiplicativa. Então, para cada número real σ_0, mostre que

$$\sum_{p} \sum_{m=1}^{\infty} |f(p^m)|p^{-m\sigma_0} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|n^{-\sigma_0} < \infty.$$

Além disso, se a condição acima ocorre, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \lim_{Q\to\infty} \prod_{p\leq Q} \{1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \ldots\},$$

uniformemente em compactos do semiplano $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma_0 < \sigma\}$. Se f for totalmente multiplicativa, conclua que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \lim_{Q\to\infty} \prod_{p\leq Q} \left(1 - f(p)p^{-s}\right)^{-1},$$

uniformemente em compactos do semiplano $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma_0 < \sigma\}$.

Problema 9. Sejam $n \mapsto a(n)$ e $n \mapsto b(n)$ funções aritméticas tais que as séries de Dirichlet correspondentes

$$A(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a(n)n^{-s} \quad ; \quad B(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b(n)n^{-s}$$

tenham abcissas de convergência absoluta $\sigma_a(A) < \infty$ e $\sigma_a(B) < \infty$, respectivamente. Prove que se

$$A(s) = B(s)$$

para todo $s = \sigma + it$ satisfazendo $\max\{\sigma_a(A), \sigma_a(B)\} < \sigma$, então

$$a(n) = b(n)$$

para todo $n \geq 1$.

Problema 10. Suponha que a série de Dirichlet

$$A(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a(n) n^{-s}$$

possua abcissa de convergência absoluta $\sigma_a < \infty$. Mostre que:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |A(\sigma + it)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|^2 \, n^{-2\sigma}$$

para todo $\sigma > \sigma_a$.

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: `carneiro@impa.br`