ELEMENTOS DE ANÁLISE

IMPA - 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

Lista 1 - Entrega 17/01

Escolha (pelo menos) 4 dos 5 problemas a seguir.

Problema 1. Prove que para todo natural n temos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Problema 2. Considere a sequência de Fibonacci $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \geq 1$. Encontre todos os naturais n tais que

$$F_n = n^2.$$

Dica: Faça alguns casos iniciais e tente provar por indução que a partir de um certo n o termo F_n será maior que n^2.

Problema 3. Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove que para quaisquer números reais não-negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vale a desigualdade $MA \geq MG$ (média aritmética é maior ou igual à média geométrica), i.e.

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n}.$$

Dica: Prove para $n = 1$ e $n = 2$ diretamente. Depois faça uma indução da seguinte forma: (i) prove que se vale para n vale para $2n$; (ii) prove que se vale para n vale para $n - 1$.

Problema 4.

(i) Prove que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

(ii) Um número real é dito ser *algébrico* se ele é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Por exemplo, $\sqrt[3]{2}$ é algébrico pois é raiz de $x^3 - 2 = 0$. Prove que o conjunto dos números reais algébricos é enumerável. Conclua que existem números reais que não são algébricos (este são chamados transcendentes).

Curiosidade: Provar que um número específico, digamos π ou e é transcendente é uma tarefa um pouco mais difícil...

Date: 6 de janeiro de 2018.
2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.
Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 5. (Construindo os números reais via os cortes de Dedekind). Defina o conjunto X da seguinte forma. Os *elementos* de X são subconjuntos $A \subset \mathbb{Q}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- A é fechado inferiormente, i.e. se $x \in A$ e $y \leq x$ então $y \in A$.
- A é limitado superiormente mas não possui elemento máximo.

(i) Defina duas operações $+ : X \times X \to X$ e $\cdot : X \times X \to X$ de modo que $(X, +, \cdot)$ seja um corpo.

(ii) Defina uma relação de ordem (total) $\leq$ em X, que é compatível com as operações de $+$ e $\cdot$, i.e. se $A \leq B$ e $C \in X$ então, $A + C \leq B + C$, e se $0 \leq C$, $A.C \leq B.C$.

(iii) Mostre que $(X, +, \cdot)$ é de fato um corpo totalmente ordenado completo. *Completo* aqui significa que para todo subconjunto $Y \subset X$ limitado superiormente, tem-se $\sup Y \in X$.

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: carneiro@impa.br