TEORIA ANALÍTICA DOS NÚMEROS

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

LISTA 2 - ENTREGA: 22/01/2018

Problema 11. Suponha que para qualquer $\varepsilon > 0$ tenhamos

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) = O\Big(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\Big),$$

onde a constante implícita pelo $O(\cdot)$ pode depender de ε. Prove que $\zeta(s) \neq 0$ se $\Re(s) > \frac{1}{2}$.

Problema 12. Prove que

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \varphi(n)\, n^{-s},$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\{s \in \mathbb{C};\ 2 < \sigma\}$, onde φ denota a função Phi de Euler.

Problema 13. Seja $n \mapsto \tau(n)$ o número de divisores de n. Prove que:

(i)

$$\zeta(s)^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \tau(n)\, n^{-s};$$

(ii)

$$\frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \tau(n^2)\, n^{-s};$$

(ii)

$$\frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \tau(n)^2\, n^{-s}.$$

Date: 9 de janeiro de 2018.
2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.
Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 14. Seja $\mathcal{N}$ um conjunto finito de inteiros positivos e escreva $|\mathcal{N}|$ para a cardinalidade de $\mathcal{N}$. Seja

$$D(s) = \sum_{n \in \mathcal{N}} a(n) n^{-s}$$

um polinômio de Dirichlet com coeficientes suportados em $\mathcal{N}$, e assuma que $D(s)$ não é constante. Para cada número complexo w defina

$$M(w) = \left| \{ m \geq 0;\ D^{(m)}(w) = 0 \} \right| ,$$

i.e. $D(w)$ é o número de derivadas de D que se anulam em w. Prove que $M(w) < |\mathcal{N}|$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

Problema 15. Prove ou desprove: Existe uma série de Dirichlet

$$A(s) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a(n) n^{-s}$$

tal que $\sigma_a = 0$ e $\lim_{\sigma \to 0^+} A^{(m)}(\sigma)$ existe e é finito para derivadas de qualquer ordem $m = 0, 1, 2, \ldots$, porém A não possui continuação analítica em uma vizinhança de zero.

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: `carneiro@impa.br`