ELEMENTOS DE ANÁLISE

IMPA - 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

LISTA 2 - ENTREGA 25/01

Escolha (pelo menos) 4 dos 5 problemas a seguir.

Problema 6. Considere a sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ definida da seguinte forma $x_1 = 1$ e

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$$

para todo $n \geq 1$. Prove que a sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é convergente e calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Problema 7. Prove ou desprove: Existe uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de números reais tal que qualquer ponto no intervalo $[0,1]$ é limite de alguma subsequência.

Problema 8. Considere a sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dada por

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!}.$$

(i) Mostre que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é convergente. Defina

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(ii) Mostre que:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n = e.$$

(iii) Mostre que e é um número irracional.

Problema 9. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge (aqui a_n são reais).

Problema 10. Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

IMPA - ESTRADA DONA CASTORINA, 110, RIO DE JANEIRO, RJ, BRAZIL 22460-320
E-mail address: carneiro@impa.br

Date: 20 de janeiro de 2018.
2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.
Key words and phrases. XXX-XXX.