TEORIA ANALÍTICA DOS NÚMEROS

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

Lista 3 - Entrega: 25/01/2018

Problema 16. Seja G um grupo abeliano finito. Prove que G e $\widehat{G}$ são isomorfos.

Problema 17. Seja $q > 1$ um inteiro e seja a um inteiro relativamente primo com q. Prove que se n é um inteiro então vale

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv a \bmod q\,; \\ 0, & \text{se } n \not\equiv a \bmod q. \end{cases}$$

Problema 18. Seja χ uma caráter de Dirichlet módulo q e seja q_1 um divisor positivo de q. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(i) Se $\mathrm{mdc}(a, q) = 1$ e $a \equiv 1 \pmod{q_1}$, então $\chi(a) = 1$.
(ii) Se $\mathrm{mdc}(a, q) = \mathrm{mdc}(b, q) = 1$ e $a \equiv b \pmod{q_1}$, então $\chi(a) = \chi(b)$.
(iii) Existe um caráter de Dirichlet χ_1 módulo q_1 que induz χ, i.e.

$$\chi(n) = \chi_0(n)\chi_1(n)$$

pata todo $n \in \mathbb{Z}$, onde χ_0 é o caráter principal módulo q.

Problema 19. Seja χ um caráter de Dirichlet módulo q.

(i) Se χ é induzido por um caráter χ_1 módulo q_1, onde q_1 divide q e $q_1 < q$, prove que χ_1 é o único caráter módulo q_1 que induz χ.
(ii) Suponha que χ é induzido por χ_1 módulo q_1 e por χ_2 módulo q_2, onde q_1 e q_2 dividem q. Seja $q_3 = \mathrm{mdc}(q_1, q_2)$. Mostre que χ é induzido por um caráter χ_3 módulo q_3.
(iii) Seja f o condutor de χ módulo q. Portanto existe um caráter χ_1 módulo f que induz χ. Mostre que χ_1 módulo f é primitivo.
(iv) Prove que cada caráter de Dirichlet χ módulo q_1 é induzido por um único caráter primitivo.

Problema 20. Seja χ um caráter de Dirichlet primitivo módulo q. Mostre que:

$$\widehat{\chi}(1)\,\widehat{\overline{\chi}}(1) = \chi(-1).$$

Problema 21. Sejam $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 + 1$ dois números reais arbitrários. Prove ou desprove: existe uma função aritmética $a(n)$ cuja série de Dirichlet associada tem abcissa de convergência $\sigma_c = \sigma_1$ e abcissa de convergência absoluta $\sigma_a = \sigma_2$.

Date: 23 de janeiro de 2018.
2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.
Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 22. Seja χ um caráter não-principal modulo q. Prove que:

$$\max_{M,N}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right| \geq \frac{\sqrt{q}\,\left|\widehat{\chi}(-1)\right|}{\pi}.$$

Problema 23. Seja χ um caráter real modulo q. Defina

$$f(n) = \sum_{d|n}\chi(d).$$

Mostre que $f(n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre ainda que $f(n) \geq 1$ se n é quadrado perfeito.

Problema 24. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $G(n)$ o número de caracteres de Dirichlet primitivos módulo n.

(i) No semi-plano $\Re(s) > 2$ mostre que

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} G(n)n^{-s}.$$

(ii) Encontre uma fórmula fechada para $G(n)$.

(iii) Quanto vale $G(2014)$? Quanto vale G(2015)?

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: `carneiro@impa.br`