

# ELEMENTOS DE ANÁLISE

IMPA - 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

## LISTA 3 - ENTREGA 01/02

Escolha (pelo menos) 4 dos 5 problemas a seguir.

**Problema 11.** Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado. Podemos escrever  $[a, b] = A \cup B$  com  $A$  e  $B$  conjuntos não-vazios, fechados e disjuntos? Justifique.

**Problema 12.**

- (i) Para todo conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , prove que vale a união disjunta  $\mathbb{R} = \text{int } X \cup \text{int}(\mathbb{R} - X) \cup F$  onde  $F$  é formado pelos pontos  $x \in \mathbb{R}$  tais que toda vizinhança de  $x$  contém pontos de  $X$  e de  $\mathbb{R} - X$ . O conjunto  $F = \text{fr } X$  chama-se a *fronteira* de  $X$ .
- (ii) Prove que  $A \subset \mathbb{R}$  é aberto se, e somente se,  $A \cap \text{fr } A = \emptyset$ .
- (iii) Prove ou desprove:  $F = \text{fr } X$  é sempre um conjunto fechado.
- (iv) Prove ou desprove:  $\text{fr } X = \text{fr } \overline{X}$ .
- (v) Para cada um dos conjuntos seguintes, determine sua fronteira:  $X = [0, 1]$ ,  $Y = (0, 1) \cup (1, 2)$ ,  $Z = \mathbb{Q}$ ,  $W = \mathbb{Z}$ .

**Problema 13.** Sejam  $X, Y$  conjuntos disjuntos e não-vazios, com  $X$  compacto e  $Y$  fechado. Prove que existem pontos  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$  tais que

$$|x_0 - y_0| \leq |x - y|$$

para quaisquer  $x \in X$  e  $y \in Y$ . O resultado permanece verdade se removermos a hipótese  $X$  compacto? E se removermos a hipótese  $Y$  fechado?

**Problema 14.** Prove o Teorema da Categoria de Baire: "a união enumerável de conjuntos fechados de interior vazio ainda tem interior vazio".

**Problema 15.** Leia a Seção sobre o conjunto de Cantor no livro e pense nos problemas a seguir.

- (i) Dado  $a \in [0, 1]$  arbitrário, prove que existem  $x < y$  pertencentes ao conjunto de Cantor tais que  $y - x = a$ .
- (ii) Prove que os extremos dos intervalos removidos formam um subconjunto enumerável e denso no conjunto de Cantor.

IMPA - ESTRADA DONA CASTORINA, 110, RIO DE JANEIRO, RJ, BRAZIL 22460-320  
E-mail address: carneiro@impa.br

---

*Date:* 27 de janeiro de 2018.  
*2000 Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.  
*Key words and phrases.* XXX-XXX.