TEORIA ANALÍTICA DOS NÚMEROS

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

Lista 4 - Entrega: 30/01/2018

Problema 25. Seja $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ definida (em $x \in \mathbb{R}$) por

$$\psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2},$$

se $x \notin \mathbb{Z}$ and $\psi(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Z}$. Seja $\phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to [-\infty, \infty)$ definida por

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \log |2 \sin \pi x|.$$

(i) Calcule os coeficientes de Fourier de $\psi(x)$ e de $\phi(x)$.

(ii) Mostre que a série de Fourier de ϕ converge pontualmente para $\phi(x)$, para $x \neq 0$. Mostre que a série de Fourier de ψ converge pontualmente para $\psi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(iii) Mostre que:

$$-\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{e(nx)}{\pi n} = \phi(x) + i\psi(x).$$

Problema 26. Seja χ um caráter primitivo não-principal módulo q. Sejam ϕ e ψ definidas no problema anterior. Mostre que:

(i) Se $\chi(-1) = 1$, então

$$L(1, \chi) = -\pi q^{-1/2} \widehat{\chi}(1) \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m)\, \phi\Big(\frac{m}{q}\Big).$$

(ii) Se $\chi(-1) = -1$, então

$$L(1, \chi) = -i\pi q^{-1/2} \widehat{\chi}(1) \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m)\, \psi\Big(\frac{m}{q}\Big).$$

Problema 27. Seja χ um caráter primitivo não-principal módulo q. Mostre que:

$$|L(1, \chi)| \leq \tfrac{1}{2} \log q + \log\log q + O(1).$$

Quão pequena você consegue fazer a constante implícita em $O(1)$?

Date: 23 de janeiro de 2018.
2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.
Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 28. Seja a um inteiro primo com q. Utilizando as funções analíticas $\log L(s,\chi)$ no semi-plano $\Re(s) > 1$, prove que a série

$$\sum_{\substack{p \\ p \equiv a \text{ mod } q}} \frac{1}{p}$$

diverge.

Problema 29. Seja χ um caráter não-principal módulo q. Mostre que o limite

$$\lim_{Q\to\infty} \sum_{p\leq Q} \frac{\chi(p)}{p}$$

existe

Problema 30. Prove que

$$\sum_{\chi\neq\chi_0} L(1,\chi) = \varphi(q) + O\big(q^{\frac{1}{2}}\log q\big),$$

onde a soma é sobre todos os caracteres não-principais módulo q.

Problema 31. Seja $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função de von Mangoldt.

(i) Seja $q > 1$ um inteiro e a um inteiro primo com q. Defina

$$\pi(a,q;x) = \sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv a \, mod \, q}} 1 \qquad \text{e} \qquad \psi(a,q;x) = \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \, mod \, q}} \Lambda(n)$$

onde a primeira soma é sobre os primos p. Mostre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(a,q;x)\log x}{x} = \frac{1}{\varphi(q)} \iff \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(a,q;x)}{x} = \frac{1}{\varphi(q)}.$$

(ii) Mostre que:

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: carneiro@impa.br