ELEMENTOS DE ANÁLISE

IMPA - 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

Lista 4 - Entrega 01/02

Escolha (pelo menos) 4 dos 5 problemas a seguir.

Problema 16.

(i) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Prove que não existe uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente duas vezes.

Problema 17.

(i) Mostre que a função $f(x) = \sin(x^2)$ não é uniformemente contínua.

(ii) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ser periódica se existe um número real positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove ou desprove: $f(x) = \sin(x^2)$ é periódica.

Problema 18. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = f(x_0 + \frac{1}{2})$.

Problema 19. 100 bolas pretas e 100 bolas brancas são postas em fila de modo que a primeira e a última bolas sejam pretas. Prove que é possível escolher uma sequência de bolas consecutivas (nem todas!), começando da primeira, de modo que haja o mesmo número de bolas pretas e brancas nesta sequência.

Problema 20. A sequência $\{a_n\}$ é tal que $a_1 = 1$ e $a_{n+1} - a_n$ é sempre 0 ou 1. Sabendo que existe n tal que $a_n = n/1000$, prove que existe m tal que $a_m = m/500$.

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: carneiro@impa.br

Date: 26 de janeiro de 2018.
2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.
Key words and phrases. XXX-XXX.