TEORIA ANALÍTICA DOS NÚMEROS

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

LISTA 5 - ENTREGA: 08/02/2018

Problema 32. Sejam x, α e T parâmetros positivos. Para cada inteiro positivo k mostre que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{x^s}{s^{k+1}}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 < x \leq 1; \\ (k!)^{-1}\,(\log x)^k & \text{if} \quad\quad 1 \leq x. \end{cases}$$

Problema 33. Sejam x, α e T parâmetros positivos. Para cada inteiro positivo k mostre que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{x^s}{s(s+1)\ldots(s+k)}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 < x \leq 1; \\ (k!)^{-1}\,(1-x^{-1})^k & \text{if} \quad\quad 1 \leq x. \end{cases}$$

Problema 34. Sejam x, α e T parâmetros positivos. Prove que a função

$$I(x,\alpha,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s$$

verifica a identidade

$$I(x,\alpha,T) = \int_{-\infty}^{\log x} e^{\alpha y}\left(\frac{\sin Ty}{\pi y}\right)\mathrm{d}y.$$

Problema 35. (Lema de Riemann-Lebesgue) Mostre que se $F \in L^1(\mathbb{R})$ então $\widehat{F} \in C_0(\mathbb{R})$ (espaço das funções contínuas que vão a zero no infinito). Lembrando que a transformada de Fourier é definida aqui por

$$\widehat{F}(t) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixt}\,F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 36. Mostre que existe uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in $C_0(\mathbb{R})$ que não é a transformada de Fourier de uma função em $L^1(\mathbb{R})$. Conclua então que o mapa $F \mapsto \widehat{F}$ de $L^1(\mathbb{R})$ em $C_0(\mathbb{R})$ não é sobrejetivo.

Problema 37. (Plancherel) Mostre que se $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ então $\widehat{F} \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, e que vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{F}(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Mostre que a transformada de Fourier estende-se então a uma isometria em $L^2(\mathbb{R})$.

Date: 30 de janeiro de 2018.

2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.

Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 38. Seja $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis e que satisfazem

$$\lim_{|x|\to\infty} \left|F^{(k)}(x)\right| |x|^n \to 0$$

para todos os inteiros não-negativos k e n. Esta é chamada classe de Schwartz. Prove que $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ pertence a $\mathcal{S}$ e que a transformada de Fourier é uma bijeção de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.

Problema 39.

(i) Prove que $G(x) = e^{-\pi x^2}$ tem transformada de Fourier $\widehat{G}(t) = e^{-\pi t^2}$.

(ii) Encontre a transformada de Fourier de $G_\alpha(x) = e^{-\pi \alpha x^2}$, para $\alpha > 0$.

Problema 40. Encontre a transformada de Fourier de $F_\beta(x) = e^{-\pi\beta|x|}$, para $\beta > 0$.

Dica: Escreva

$$e^{-\pi|x|} = \int_0^\infty e^{-\pi\alpha|x|^2}\, \mathrm{d}\nu(\alpha)$$

para uma certa medida ν, e use Fubini.

Problema 41. Seja $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ a classe de Schwartz. Escreva $\mathcal{F}$ para a transformada de Fourier e $\mathcal{H} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ para o operador

$$\mathcal{H}(F)(x) = \left\{ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 4\pi^2 x^2 \right\} F(x) = F^{(2)}(x) - 4\pi^2 x^2 F(x).$$

Mostre que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ comutam, i.e. $\mathcal{H} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{H}$.

Problema 42. Seja $G(x) = e^{-\pi x^2}$. Mostre que para todo inteiro não-negativo n existe um polinômio mônico $p_n(x)$ de grau n e um número complexo não-nulo λ_n tal que a função $Q_n(x) = p_n(x)\, G(x)$ satisfaz a equação diferencial:

$$\mathcal{H}(Q_n)(x) = \lambda_n Q_n(x).$$

Problema 43. Seja $Q_n(x) = p_n(x)\, G(x)$ como no exercício anterior. Prove que

$$\widehat{Q_n}(t) = \lambda_n\, Q_n(t).$$

Problema 44. (Fórmula da soma de Poisson) Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável e de variação limitada. Assuma que F é normalizada, i.e. $F(x) = \frac{1}{2}(F(x+) + F(x-))$ em todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que a identidade

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} F(x+n) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K} \widehat{F}(k)\, e^{2\pi i x k}$$

vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 45. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e integrável tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} |F(x)|\, |x|^n = \lim_{|t|\to\infty} \left|\widehat{F}(t)\right| |t|^n = 0$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Prove ou desprove: F pertence à classe de Schwartz.

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: carneiro@impa.br