ELEMENTOS DE ANÁLISE

IMPA - 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

Lista 5 - Entrega 15/02

Escolha (pelo menos) 4 dos 5 problemas a seguir.

Problema 21. Seja $F : I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo I. Suponha que existe $\alpha > 1$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq |x - y|^{\alpha}$$

para quaisquer $x, y \in I$. Prove ou desprove: F é constante.

Problema 22. Seja

$$f(x) = \frac{x^5}{1 + x^6}.$$

Calcule as derivadas de ordem 2001 e 2003 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no ponto 0.

Problema 23. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo I. Uma *raiz* de f é um ponto $c \in I$ tal que $f(c) = 0$. Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f. Use este fato para mostrar que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ possui exatamente uma raiz no intervalo $(1, 3)$. Esboce o gráfico deste polinômio, indicando onde a função é crescente/decrescente, côncava/convexa, e indicando também as raízes e pontos de máximo/mínimo.

Problema 24. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Suponha que $f(a) = f(b) = 0$. Então, dado arbitrariamente $k \in \mathbb{R}$, mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = kf(c)$. (dica considere $p(x) = f(x)\, e^{-kx}$).

Problema 25. Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz:

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

para quaisquer $x, y \in (0, 1)$. Prove ou desprove: f é contínua.

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: carneiro@impa.br

Date: 8 de fevereiro de 2018.
2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.
Key words and phrases. XXX-XXX.