TEORIA ANALÍTICA DOS NÚMEROS

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

Lista 6 - Entrega: 15/02/2018

Problema 46. Seja χ um caráter primitivo módulo q. Para $y > 0$ defina:

$$\theta(y, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) e^{-\frac{\pi y n^2}{q}}$$

e

$$\omega(y, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\chi(n) e^{-\frac{\pi y n^2}{q}}.$$

Mostre que se $\chi(-1) = 1$ então

$$\theta(y^{-1}, \chi) = \widehat{\chi}(1) y^{1/2} \theta(y, \overline{\chi})$$

para todo $y > 0$, e se $\chi(-1) = -1$ então

$$\omega(y^{-1}, \chi) = i\, \widehat{\chi}(1) y^{3/2} \omega(y, \overline{\chi})$$

para todo $y > 0$.

Problema 47. Prove a equação funcional para L-funções. Seja χ um caráter primitivo, não-principal módulo q.

(i) Se $\chi(-1) = 1$ então:

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) = \widehat{\chi}(1) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(1-s)} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) L(1-s, \overline{\chi}).$$

(ii) Se $\chi(-1) = -1$ então:

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s+1)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \chi) = i\, \widehat{\chi}(1) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(2-s)} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) L(1-s, \overline{\chi}).$$

Problema 48. Seja

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}.$$

(i) Encontre os valores de A e B.

(ii) Calcule os valores de $\zeta(0)$, $\zeta(-1)$ e $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$.

(iii) Mostre a seguinte versão alternativa da equação funcional:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s)\, \zeta(s).$$

Date: 8 de fevereiro de 2018.

2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.

Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 49. Mostre a fórmula de Stirling para a função Γ:

(i) Para $\delta > 0$ fixo e $-\pi + \delta < \arg(s) < \pi - \delta$ temos
$$\log \Gamma(s) = \left(s - \tfrac{1}{2}\right) \log s - s + \tfrac{1}{2} \log 2\pi + O(|s|^{-1})$$
quando $|s| \to \infty$.

(ii) Sob as mesmas condições acima:
$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O(|s|^{-1}).$$

Problema 50. Sejam $\rho = \beta + i\gamma$ os zeros não-triviais de $\zeta(s)$.

(i) Mostre que:
$$\sum_{0<\gamma\leq T} \frac{1}{|\rho|} = O\big(\log^2 T\big).$$

(ii) Se t não é ordenada de um zero de ζ, definimos em aula a função
$$S(t) = \frac{1}{\pi}\arg \zeta(\tfrac{1}{2} + it) = -\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it)\,\mathrm{d}\sigma$$
e mostramos que $S(t) = O(\log t)$. Defina agora:
$$S_1(T) = \int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t.$$
Mostre que:
$$S_1(T) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{2} \log\big|\zeta(\sigma + iT)\big|\,\mathrm{d}\sigma + O(1).$$

(iii) Conclua que:
$$S_1(T) = O(\log T).$$

Problema 51. Mostre que a hipótese de Riemann é equivalente à seguinte afirmação: para qualquer $\varepsilon > 0$ temos
$$M(x) = \sum_{n\leq x} \mu(n) = O\Big(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\Big),$$
onde a constante implícita pelo $O(\cdot)$ pode depender de ε.

Problema 52. Encontre uma expressão assintótica (termo principal e termo de erro, o mais refinado que você puder) para a soma:
$$F(x) = \sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ primo}}} (\log p)^2.$$
Se assumirmos a hipótese de Riemann, o que mais podemos dizer sobre esta soma?

Problema 53. Seja

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(x)$$

Mostre que a hipótese de Riemann é equivalente à estimativa:

$$\psi(x) = x + O\big(x^{1/2} \log^2 x\big).$$

Nota: Você pode usar, sem demonstrar novamente, a seguinte estimativa provada no curso via a fórmula de Perron: para $x \ge 2$ inteiro, e $T \ge 3$ vale

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) + R(x, T)$$

onde $\psi_0(x) = \psi(x)$ se x não for potência de primo, $\psi_0(x) = \psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(x)$ se x for potência de primo, e o resto $R(x,T)$ satisfaz

$$|R(x,T)| \ll \frac{x \log^2(xT)}{T}.$$

Problema 54. Mostre que

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x\, e^{-c(\log x)^{1/2}}\right)$$

para alguma constante $c > 0$ universal.

Problema 55. Mostre que a hipótese de Riemann é equivalente a

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{1/2} \log x).$$

Problema 56. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, não-negativa, integrável, com $\mathrm{supp}(\widehat{F}) \subset [-1, 1]$ e $F(0) = 1$. Determine, com justificativa, o valor mínimo de

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, \mathrm{d}x.$$

Problema 57. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$H(x) = \frac{\cos 2\pi x}{1 - 16x^2}.$$

(i) Compute a transformada de Fourier $\widehat{H} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(ii) Mostre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(\cos 2\pi x)\, H(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Dica: Expanda $x \mapsto \mathrm{sgn}(\cos 2\pi x)$ em sua série de Fourier.

(iii) Mostre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x)|\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} \frac{\sin \pi t}{\pi t}\, \mathrm{d}t = 0.9259\ldots$$

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: carneiro@impa.br