

ELEMENTOS DE ANÁLISE

IMPA - 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

LISTA 6 - ENTREGA 22/02

Escolha (pelo menos) 4 dos 5 problemas a seguir.

Problema 26. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em I com $f'' \geq 0$, ou seja f convexa. Se x_1, x_2, \dots, x_n são pontos quaisquer em I mostre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}. \quad (0.1)$$

Esta desigualdade é conhecida como desigualdade de Jensen. Enuncie o resultado análogo para funções côncavas. Utilizando (0.1) prove a desigualdade MA \geq MG:

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

válida para quaisquer a_1, a_2, \dots, a_n reais não-negativos.

Problema 27. Sejam x_1, x_2, \dots, x_n reais positivos cuja soma é 1. Prove que:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Problema 28. Sejam α, β, γ os ângulos de um triângulo. Prove que:

- (i) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- (ii) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$
- (iii) $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$
- (iv) $\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma \geq \sqrt{3}$

Cuidado: Nem todas as funções acima são côncavas ou convexas em todo o domínio. Considere alguns casos separadamente.

Problema 29. Sejam a, b, c reais positivos tais que $a+b+c = 1$. Calcule o mínimo valor para:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \frac{1}{c}\right)^{10}$$

Date: 16 de fevereiro de 2018.

2000 Mathematics Subject Classification. XX-XXX.

Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 30. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ no intervalo I . Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que para quaisquer $x, x_0 \in I$ vale que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

IMPA - ESTRADA DONA CASTORINA, 110, RIO DE JANEIRO, RJ, BRAZIL 22460-320
E-mail address: `carneiro@impa.br`