TEORIA ANALÍTICA DOS NÚMEROS

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

LISTA 7 - ENTREGA: 22/02/2018

Uma vez que não vamos ter aula nesta semana de carnaval, resolvi passar esta lista de exercícios sobre tópicos de aproximações diofantinas e equidistribuição que ministrei no curso de 2015 (neste curso vamos fazer outras coisas ao invés disso). Para sua sorte (!) estas aulas estão todas no canal do IMPA do YouTube. Seu dever nesta lista é então:

- Assistir às 5 primeiras aulas do curso de Teoria Analítica dos Números de 2015 no canal do IMPA do YouTube (se tiver curiosidade, pode assistir às 6 primeiras).
- Fazer os exercícios abaixo.

Nota: O material desta lista não entrará na prova de 15/02, mas entrará sim na prova final.

Problema 58. Sejam x, y e z pontos em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tais que $x + y + z = 0$. Prove que uma das opções abaixo é válida:

$$\|x\| + \|y\| + \|z\| = 2\, \max\{\|x\|, \|y\|, \|z\|\},$$

ou

$$\|x\| + \|y\| + \|z\| = 1.$$

Problema 59. Sejam x e y pontos em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Prove que:

(i) $2\max\{\|x\|, \|y\|\} = \|x\| + \|y\| + \min\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$.

(ii) $2\min\{\|x\|, \|y\|\} = \|x\| + \|y\| - \min\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$.

(iii) $\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} = \big|\|x\| - \|y\|\big|$.

Problema 60. Prove que a identidade

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}\|2^n x\| = \|x\|\big(1 - 2\|x\|\big)$$

vale para todo $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Date: 9 de fevereiro de 2018.

2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.

Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 61. Prove que o número

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)!}$$

é transcendente.

Problema 62. Seja $\{\xi_n \,;\, n = 1, 2, ..., N\}$ um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Defina $S : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to [0, \infty)$ por

$$S(y) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \|\xi_m - \xi_n - y\|.$$

Prove que

$$S(0) \leq S(y) \leq S(\tfrac{1}{2})$$

para todo $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Dica: Escreva $\| \cdot \|$ como série de Fourier.

Problema 63. Prove o Teorema de Hurwitz: "Seja α um número irracional. Então:

(i) Existem infinitos racionais p/q, com $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$, tais que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

(ii) Prove que $\sqrt{5}$ é a melhor constante possível na desigualdade acima, i.e. se $\sqrt{5}$ for substituído por $C > \sqrt{5}$, então (i) pode não ser verdade (para algum irracional α)."

Dica: Para (i) considere o grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ das frações de Farey. Defina F_N como sendo o conjunto das frações p/q com $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$ e $1 \leq q \leq N$, ordenadas de maneira crescente. Se p/q e p'/q' são frações consecutivas em F_N mostre que, para qualquer real α, pelo menos uma das desigualdades vale:

$$(i) \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}; \quad (ii) \left|\alpha - \frac{p+p'}{q+q'}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}(q+q')^2}; \quad (iii) \left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q'^2}.$$

Você deverá usar que $p'q - pq' = 1$ (mostre isso também).

Para (ii), mostre que se α é um algébrico de grau 2, com polinômio minimal $f(x) = ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{Z}[x]$ e discriminante $D = b^2 - 4ac$, então, para qualquer real $C > \sqrt{D}$, a desigualdade

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Cq^2}$$

possui apenas um número finito de soluções racionais.

Problema 64. Enuncie e prove o teorema de Stone-Weierstrass.

Problema 65.

(i) Sejam M e N inteiros com $1 \leq N$, e seja $f : [M, M+N] \to \mathbb{C}$ uma função absolutamente contínua. Prove que:

$$\tfrac{1}{2}f(M) + f(M+1) + f(M+2) + ... + f(M+N-1) + \tfrac{1}{2}f(M+N) =$$
$$= \int_M^{M+N} f(y)\,\mathrm{d}y + \int_M^{M+N} f'(y)\,\psi(y)\,\mathrm{d}y,$$

onde $\psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ se $x \notin \mathbb{Z}$, e $\psi(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Z}$.

(ii) Decida quais das sequências abaixo são uniformemente distribuídas:
   (a) $\{n!e;\ n = 1, 2, ...\}$.
   (b) $\{\log n;\ n = 1, 2, ...\}$.
   (c) $\{\sqrt{n};\ n = 1, 2, ...\}$.

Problema 66. Sejam $\{\xi_n;\ n = 1, 2, ...\}$ e $\{\eta_n;\ n = 1, 2, ...\}$ sequências em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Assuma que $\{\xi_n;\ n = 1, 2, ...\}$ é equidistribuída e que

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} \|\eta_n\| = 0.$$

Prove que $\{\xi_n + \eta_n;\ n = 1, 2, ...\}$ é equidistribuída.

Problema 67. Seja $\{\xi_n;\ n = 1, 2, ...\}$ uma sequência em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A sequência $\{\xi_n;\ n = 1, 2, ...\}$ é equidistribuída.

(ii) Para cada função $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ temos

$$\lim_{N\to\infty} N^{-2} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \left| \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n - y) - N\widehat{f}(0) \right|^2 \mathrm{d}y = 0.$$

Problema 68. Seja

$$F(x) = \sum_{m=-M}^{M} \widehat{F}(m)\, e(mx)$$

um polinômio trigonométrico que toma valores não-negativos para $x \in \mathbb{R}$. Prove o seguinte teorema de Fejér: existe um polinômio trigonométrico

$$f(x) = \sum_{m=0}^{M} \widehat{f}(m)\, e(mx)$$

tal que $F(x) = |f(x)|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Problema 69. Vimos em aula (no vídeo) que

$$\frac{1}{2} \leq \Delta(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N) \leq \frac{N}{2}.$$

Mostre que para cada $N > 0$ ambas as cotas podem ser atingidas.

Problema 70. Seja $\{a(n);\, n = 1, 2, ...\}$ uma sequência de números reais não-negativos tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n} < \infty.$$

Prove que podemos escolher uma sequência crescente $1 < b(1) < b(2) < \ldots$ de números reais, com $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$, tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)b(n)}{n} < \infty.$$

Problema 71. Seja $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} :\to \mathbb{C}$ uma função normalizada de variação limitada, com $\widehat{g}(0) = 0$ e $\widehat{g}(m) \neq 0$ para todos os inteiros $m \neq 0$. Seja $\{\xi_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ uma sequência em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Prove que $\{\xi_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ é equidistribuída se e somente se

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\, \Delta_g^{(\infty)}(\xi_1, \ldots, \xi_N) = 0,$$

onde

$$\Delta_g^{(\infty)}((\xi_1, \ldots, \xi_N) = \sup_{y\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \left| \sum_{n=1}^{N} g(\xi_n - y) \right|.$$

Problema 72. Definimos a discrepância L^p de uma sequência $\{\xi_n; n = 1, 2, \ldots, N\}$ por

$$\Delta_N^{(p)} = \Delta^{(p)}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N) = \left\| \sum_{n=1}^{N} \psi(\xi_n - y) \right\|_{L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}.$$

Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ uma função Lipschitz, com Lipschitz constant $C(f)$, i.e.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C(f)\|x - y\|$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Mostre que:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) - N\widehat{f}(0) \right| \leq \Delta^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)\, C(f).$$

Problema 73. Seja $\{\xi_n; n = 1, 2, \ldots, N\}$ um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Um outro tipo de discrepância $D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ pode ser definido como

$$D(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{N} \varphi_{u,v}(\xi_n) - N(v - u) \right|;\ \varphi_{u,v} \in \mathcal{C} \right\},$$

onde o supremo é tomado sobre a coleção $\mathcal{C}$ de todas as funções características de intervalos (normalizadas). Prove que:

$$\Delta^{(\infty)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) \leq D(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) \leq 2\Delta^{(\infty)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N).$$

Problema 74. Seja $\{\xi_n; n = 1, 2, \ldots, N\}$ um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $0 < p < \infty$. Prove a desigualdade:

$$\left\{\Delta^{(\infty)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)\right\}^{(p+1)} \leq N(p+1)\left\{\Delta^{(p)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)\right\}^{p}.$$

Problema 75. Seja $0 < p < \infty$. Prove que a sequência $\{\xi_n; n = 1, 2, \ldots\}$ é equidistribuída em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se e somente se

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\ \Delta^{(p)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) = 0.$$

Problema 76. Sejam $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ números reais distintos. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números complexos. Mostre que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\, e(\xi_n x)\right|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$

Problema 77. A desigualdade de Erdös-Turán estabelece, para N, M inteiros positivos:

$$\Delta^{(\infty)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \ll \frac{N}{M} + \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m}\left|\sum_{n=1}^{N} e(m\xi_n)\right|.$$

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_N$ inteiros positivos distintos. Mostre que existe $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que:

$$\Delta^{(\infty)}(\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_N) \ll \sqrt{N}\log N.$$

Dica: Utilize a desigualdade de Erdös-Turán e tire a média sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Problema 78. Seja α um número algébrico de grau 2. Mostre que:

$$\Delta^{(\infty)}(\alpha, 2\alpha, \dots, N\alpha) \ll (\log N)^2.$$

Dica: (a) Utilize a desigualdade de Erdös-Turán (e o fato que α é algébrico de grau 2) para mostrar que

$$\Delta^{(\infty)}(\alpha, 2\alpha, \dots, N\alpha) \ll \frac{N}{M} + \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m\|m\alpha\|}$$

(b) Defina $S_m = \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\|l\alpha\|}$ e prove que

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m\|m\alpha\|} = \frac{1}{M}S_M + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{S_m}{m(m+1)}.$$

(c) Utilize a identidade $\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = \big|\|x\| - \|y\|\big|$ e o fato que α é algébrico de grau 2 para mostrar que

$$S_m \ll_\alpha m\log m.$$

(d) Conclua tomando $M = N$.

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: carneiro@impa.br