

# ELEMENTOS DE ANÁLISE

IMPA - 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

## LISTA 7 - ENTREGA 01/03

Escolha (pelo menos) 4 dos 5 problemas a seguir.

**Problema 31.** Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz: se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas, então:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 \, dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 \, dx \right).$$

**Problema 32.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável, com  $f'$  integrável (mas não necessariamente contínua - como estudamos em aula). Prove que para quaisquer  $x, c, \in [a, b]$  tem-se

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) \, dt.$$

**Problema 33.** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa, prove que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

**Problema 34.** Mostre que  $\int_0^\infty \sin(x^2) \, dx$  converge, mas não absolutamente. Mostre que  $\int_0^\infty x \sin(x^4) \, dx$  converge, embora a função  $x \sin(x^4)$  seja ilimitada.

**Problema 35.** Encontre todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tais que

$$f(x)^2 = \int_0^x (f(t)^2 + f'(t)^2) \, dt + 2018$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

IMPA - ESTRADA DONA CASTORINA, 110, RIO DE JANEIRO, RJ, BRAZIL 22460-320  
E-mail address: carneiro@impa.br