TEORIA ANALÍTICA DOS NÚMEROS

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

PROVA 1 - 30/01/2018 - DURAÇÃO: 2H

Cada problema vale 5 pontos. Escolha (pelo menos) 4 dos 5 problemas a seguir.

Problema 1. Seja $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função de von Mangoldt. Seja $q \geq 1$ um inteiro e χ um caráter de Dirichlet módulo q. Determine, com justificativa, a abcissa de convergência absoluta σ_a da série

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, \chi(n)\, n^{-s}.$$

Problema 2. Seja $q \geq 2$ um inteiro e seja χ um caráter de Dirichlet módulo q com $\chi(-1) = 1$. Mostre que

$$\max_{m \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{n=1}^{q} \chi(n) \cos\left(\frac{2\pi mn}{q}\right) \right| \geq \sqrt{\varphi(q)}.$$

Problema 3.

(i) Prove que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + O(1),$$

onde a soma é sobre os números primos p menores ou iguais a x.

(ii) Defina a função aritmética $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1.$$

Mostre que

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = x \log\log x + O(x).$$

Date: 30 de janeiro de 2018.

Problema 4.

(i) Defina a função aritmética $k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $k(1) = 1$ e para $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$, com p_i's primos distintos, $k(n) = a_1 a_2 \ldots a_n$, i.e. o produto dos expoentes na fatoração em primos. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} k(n)\, n^{-s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(2s)\,\zeta(3s)}{\zeta(6s)}$$

em $\Re(s) > 1$.

(ii) Seja $q_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função característica dos *square-full numbers*, i.e. $q_2(1) = 1$, e para $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$, com p_i's primos distintos, $q_2(n) = 1$ se todos os $a_i \geq 2$, e $q_2(n) = 0$ se algum $a_i = 1$. Mostre que

$$\mu * k = q_2\,,$$

onde μ é a função *mu* de Möbius.

Problema 5. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ uma função não identicamente nula, *periódica* e completamente multiplicativa ($f(mn) = f(m)f(n)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$). Prove ou desprove: f é um caráter de Dirichlet módulo q para algum $q \geq 1$.