ELEMENTOS DE ANÁLISE

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

PROVA 1 - 01/02/2018 - DURAÇÃO: 3H

Cada problema vale 5 pontos. Escolha (pelo menos) 5 dos 6 problemas a seguir.

Problema 1. Seja $n \in \mathbb{N}$. Calcule o valor da soma:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Dica: Faça os casos onde n é pequeno, conjecture a resposta correta, e prove por indução.

Problema 2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Prove que as seguintes afirmativas são equivalentes:

(a) X é fechado e limitado.

(b) Toda sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ em X possui uma subsequência convergente para um ponto de X.

Problema 3.

(i) Seja S o conjunto de todas as sequências infinitas $\{x_n\}_{n\geq 1}$ com $x_n = 0$ ou 1 para cada $n \in \mathbb{N}$. O conjunto S é enumerável? Justifique.

(i) Seja S_0 o conjunto de todas as sequências infinitas $\{x_n\}_{n\geq 1}$ com $x_n = 0$ ou 1 para cada $n \in \mathbb{N}$, com apenas uma quantidade finita de $1's$. O conjunto S_0 é enumerável? Justifique.

Problema 4. Se A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ definimos o conjunto $A + B$ por

$$A + B = \{a + b \ : \ a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Prove ou desprove:

(i) Se A é aberto e B é qualquer, então $A + B$ é aberto.

(ii) Se A e B são compactos, então $A + B$ é compacto.

(iii) Se A é compacto e B é fechado, então $A + B$ é fechado.

(iv) Se A e B são fechados, então $A + B$ é fechado.

Problema 5. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Prove ou desprove:

(i) Existe $a \in [0, 1]$ tal que $f(a) = a^2$.

(ii) Existe $a \in [0, 1]$ tal que $f(a) = (1 - a)/2$.

(iii) Se $f(0) = f(1)$, existe $a \in [0, \frac{2}{3}]$ tal que $f(a) = f(a + \frac{1}{3})$.

Problema 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona não-decrescente (i.e. $f(x) \leq f(y)$ se $x \leq y$). Seja X o conjunto dos pontos onde f *não é contínua*. Prove ou desprove: X é enumerável.

Date: 31 de janeiro de 2018.