TEORIA ANALÍTICA DOS NÚMEROS

IMPA - VERÃO 2018

INSTRUTOR: EMANUEL CARNEIRO

Prova 2 - 15/02/2018 - Duração: 2h

Cada problema vale 5 pontos. Pontos parciais só serão dados em caso de progresso substancial. Escreva de modo muito claro e muito organizado.

Problema 1. A função $\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é a função meromorfa definida por

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\, e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}},$$

onde a constante de Euler-Mascheroni $\gamma = 0.577\ldots$ é tal que $\Gamma(1) = 1$. Seja

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}.$$

Encontre os valores de A, B, $\zeta(0)$, $\zeta'(0)$ e $\zeta(-1)$.

Problema 2. Seja $N(T)$ a função que conta os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ com ordenadas entre 0 e T. Para T suficientemente grande, determine qual das duas expressões é maior:

$$N(T^2 + T) - N(T^2) \quad \text{ou} \quad N(3T) - N(T).$$

Problema 3. Encontre uma expressão assintótica (termo principal e termo de erro, o mais refinado que você puder) para a soma:

$$F(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ primo}}} \frac{\log p}{p}.$$

Se assumirmos a hipótese de Riemann, o que mais podemos dizer sobre esta soma?

Problema 4. Para $t > 0$ que não é ordenada de zero de ζ, seja $S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$, onde o argumento é obtido por uma variação contínua ao longo dos segmentos de reta conectando os pontos 2, $2 + it$ e $\frac{1}{2} + it$, com a convenção de que $\arg \zeta(2) = 0$. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1 + x^2}.$$

Assumindo a hipótese de Riemann, mostre que

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma} f(t - \gamma) + O(1),$$

onde a soma é sobre todos os zeros não-triviais $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ de ζ.

Date: 14 de fevereiro de 2018.