ANÁLISE HARMÔNICA 2012.2 - EXAME FINAL

EMANUEL CARNEIRO

Problema 1. Para uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definimos

$$\|f\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^p \right)^{1/p},$$

se $1 \leq p < \infty$, e

$$\|f\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|.$$

Definimos o operador maximal discreto M por

$$Mf(n) = \sup_{r \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{(2r+1)} \sum_{k=-r}^{r} |f(n+k)|.$$

Mostre que:

(i) $M : l^1(\mathbb{Z}) \to l^1_{weak}(\mathbb{Z})$ é limitado.

(ii) $M : l^p(\mathbb{Z}) \to l^p(\mathbb{Z})$ é limitado, se $1 < p \leq \infty$.

Problema 2. Seja $N \in \mathbb{N}$ e $1 < p < \infty$. Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ defina

$$S_N(f) = \Big(\chi_{[-N,N]}(t)\, \widehat{f}(t) \Big)^{\vee}.$$

(i) Mostre que

$$\|S_N(f)\|_p \leq C \|f\|_p,$$

onde a constante C independe de N e f.

(ii) Estenda S_N por densidade para $f \in L^p(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\lim_{N \to \infty} S_N(f) = f,$$

onde o limite é tomado na norma $L^p(\mathbb{R})$.

Problema 3. Seja $n \geq 5$ e $1 \leq p, q \leq \infty$. Suponha que desigualdade

$$\|f\|_q \leq C \|\Delta(\Delta f)\|_p$$

seja válida para qualquer $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde C é uma constante.

(i) Qual deve ser a relação entre p, q e n?

(ii) Prove que se $q < \infty$ na relação encontrada no item anterior, então a desigualdade é válida.

Date: 5 de novembro de 2017.

2000 *Mathematics Subject Classification.* XX-XXX.

Key words and phrases. XXX-XXX.

Problema 4. Dados $\delta > 0$ e $A > 0$, considere o conjunto:

$$\Gamma = \left\{F \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R});\ F \geq 0;\ \mathrm{supp}(\widehat{F}) \subset [-\delta, \delta];\ \widehat{F}(0) = A\right\}$$

Seja

$$M = \sup_{F \in \Gamma} F(0).$$

(i) Prove que existe uma única função $F \in \Gamma$ que atinge este máximo.
(ii) Determine M em função de δ e A.
(iii) Encontre a função ótima F.

Problema 5. Defina

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n+\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y,$$

onde

$$\gamma(\alpha) = \pi^{n/2}\, 2^\alpha\, \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right))}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

com $0 < \alpha < n$, e f é tal que a integral converge absolutamente para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(i) Prove que se $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $0 < \alpha + \beta < n$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então
$$I_\alpha(I_\beta f) = I_{\alpha+\beta}(f).$$
(ii) Conclua que, se $|x| = 1$, vale
$$\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n+\alpha}\, |y|^{-n+\beta}\,\mathrm{d}y = \frac{\gamma(\alpha)\,\gamma(\beta)}{\gamma(\alpha+\beta)},$$
onde $0 < \alpha$, $0 < \beta$ e $0 < \alpha + \beta < n$.

IMPA - Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil 22460-320
E-mail address: carneiro@impa.br