Centro de massa e aplicações à geometria

Emanuel Carneiro* e Frederico Girão† - UFC

December 20, 2006

1 Introdução

Chamaremos de sistema de massas um conjunto de n pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ no plano, sendo que ao ponto $P_k = (x_k, y_k)$ está associada uma massa $m_k \in \mathbb{R}$, de modo que $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$. Definiremos o centro de massa desse sistema como sendo o ponto (x, y) tal que:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{M} \;\; ; \;\; y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{M}$$

onde $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ é a massa associada a ele.

Notação: Quando ao ponto (x, y) estiver associada uma massa m escreveremos $(x, y)[m]$.

Observações:

(i) Podemos interpretar fisicamente o centro de massa de um sistema como sendo o ponto onde ele concentra toda sua massa. Em termos práticos, isso nos ajuda a simplificar, por exemplo, problemas de Dinâmica onde há aplicações de forças sobre o sistema.

(ii) Podemos considerar os pontos em $\mathbb{R}^n$. Neste caso, o cálculo do centro de massa de um sistema é análogo.

(iii) Claramente o centro de massa é único.

2 Propriedades Básicas

Proposição 1 *Seja $(x, y)[M]$ o centro de massa do sistema $S_1 = \{(x_1, y_1)[m_1], (x_2, y_2)[m_2], \ldots, (x_k, y_k)[m_k]\}$, e seja $(a, b)[N]$ o centro de massa do sistema $S_2 = \{(a_1, b_1)[n_1], (a_2, b_2)[n_2], \ldots, (a_l, b_l)[n$ Então, se $M + N \neq 0$, o centro de massa do sistema $S = S_1 \cup S_2$ é o centro de massa do sistema $\{(x, y)[M], (a, b)[N]\}$.*

*email: emanuelc@baydenet.com.br ou emanuelc@mat.ufc.br
†email: fgirao@mat.ufc.br

Demonstração: Por definição o centro de massa do sistema $S = S_1 \cup S_2$ é o ponto (X,Y)[M+N], onde:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i + \sum_{j=1}^{l} n_j a_j}{M+N} = \frac{Mx + Na}{M+N}$$

que é justamente a primeira coordenada do centro de massa do sistema $\{(x,y)[M],(a,b)[N]\}$. Para a segunda coordenada é análogo. $\square$

A proposição acima nos dá um algoritmo para calcular o centro de massa de um sistema com n pontos. Para isso tomamos dois pontos $(x_1,y_1)[m_1]$ e $(x_2,y_2)[m_2]$ quaisquer desse sistema e os substituímos pelo seu centro de massa com a massa m_1+m_2. Recaímos assim num sistema com $n-1$ pontos e continuamos o processo. Assim o cálculo de centros de massa resume-se apenas ao caso $n=2$, que estudamos a seguir:

Centro de massa de um sistema com duas massas

O centro de massa $(x,y)[M]$ de um sistema $\{(x_1,y_1)[m_1],(x_2,y_2)[m_2]\}$ é colinear com os pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) pois

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} &= x_1y_2 + xy_1 + x_2y - xy_2 - x_2y_1 - x_1y \\
&= x_1y_2 + \left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\right)y_1 + \left(\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)x_2 \\
&\quad - \left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\right)y_2 - x_2y_1 - \left(\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)x_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

E além disso se chamamos $(x_1,y_1) = A$, $(x_2,y_2) = B$ e $(x,y) = G$ vale que:

$$m_1\overrightarrow{AG} + m_2\overrightarrow{BG} = 0$$

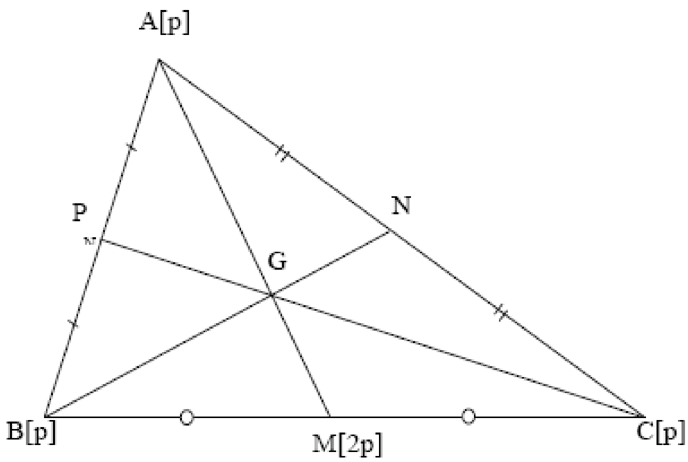
Tal fato é deixado como exercício para o leitor.

Observação: Pela equação acima distinguimos alguns casos:

- As duas massas têm o mesmo sinal. Nesse caso o ponto G está entre A e B e vale que $|m_1||AG| = |m_2||BG|$.
- As duas massas têm sinais contrários. Nesse caso G está fora do segmento AB e vale que $|m_1||AG| = |m_2||BG|$

3 Aplicações à Geometria

Exemplo 1: Vamos tomar um triângulo ABC qualquer e pôr massas iguais em seus três vértices, ou seja consideraremos o sistema $A[p],B[p],C[p]$. Chamaremos de G o

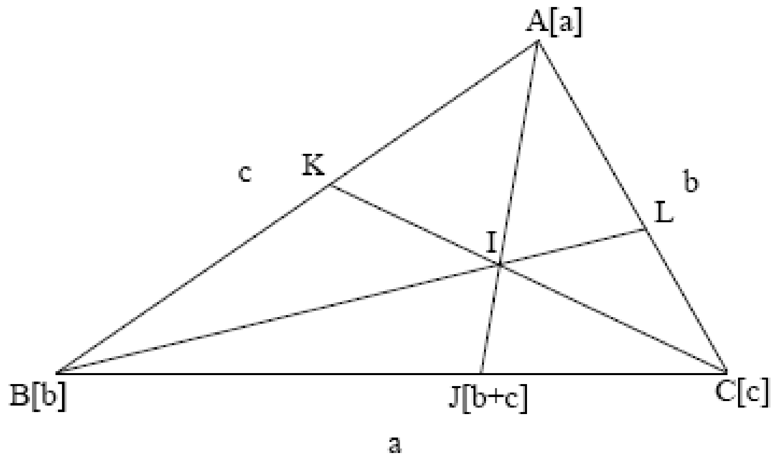


centro de massa desse sistema. Como encontrar o ponto G? (hummm...) Denotaremos C.M. = centro de massa. Vamos usar a proposição da seção anterior. O C.M. de $B[p]$ e $C[p]$ é o seu ponto médio M. Podemos então trocar $B[p]$ e $C[p]$ por $M[2p]$. Logo o ponto G será o C.M. de $A[p]$ e $M[2p]$, que está sobre AM e divide AM na razão $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$. Sejam N e P os pontos médios de AC e AB. De modo análogo poderíamos ter provado que $G \in BN$ e que $G \in CP$. Esta é uma demonstração diferente que as três medianas concorrem em G, que é portanto o baricentro do triângulo. Além disso, segue do exposto acima que:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = \frac{2}{1}$$

□

Exemplo 2: Denote por a, b, c, os lados do triângulo ABC da maneira usual. Vamos pôr agora massas nos vértices do triângulo proporcionais aos lados opostos, ou seja, considere o sistema $A[a], B[b], C[c]$. Seja I o C.M. desse sistema. Você merece um prêmio se descobrir quem é I... O raciocínio é igual ao do exemplo anterior. O C.M. de $B[b]$ e $C[c]$ é um ponto J no lado BC tal que $\frac{JB}{JC} = \frac{c}{b}$, ou seja, J é o pé da bissetriz interna. Logo I será o C.M. de $A[a]$ e $J[b+c]$. Tiramos daí que $I \in AJ$ e que $\frac{AI}{IJ} = \frac{b+c}{a}$. Sejam BL e CK bissetrizes internas. De modo análogo poderíamos ter provado que



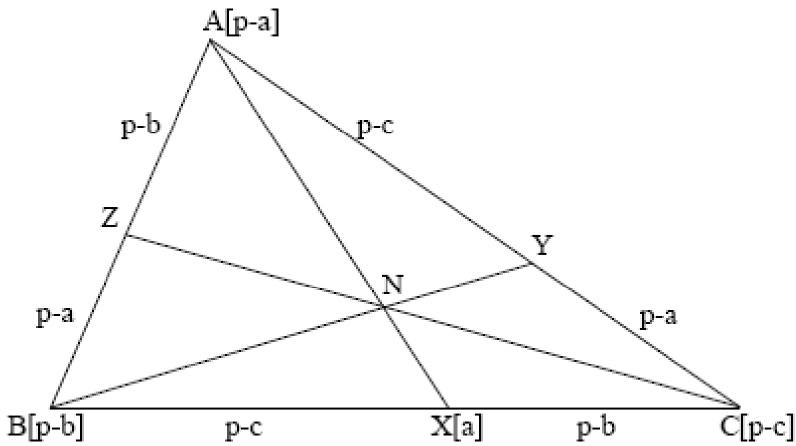
$I \in BL$ e que $I \in CK$, o que mostra que I é o incentro. As razões saem de graça:

$$\frac{BI}{IL} = \frac{a+c}{b} \quad ; \quad \frac{CI}{IK} = \frac{a+b}{c}$$

$\square$

Exemplo 3: Seja p o semiperímetro do triângulo. Agora uma novidade: o sistema de massas será $A[p-a], B[p-b], C[p-c]$. Seja N o C.M. desse sistema. Você realmente merece um prêmio se descobrir quem é o N. O C.M. de $B[p-b]$ e $C[p-c]$ é um ponto X sobre o lado BC tal que $\frac{BX}{CX} = \frac{p-c}{p-b}$, donde concluímos que $BX = p-c$ e que $CX = p-b$. Este ponto X é onde o exincírculo relativo ao lado a toca este lado (como referência sobre este fato podemos indicar [1]). Logo N será o C.M. de $A[p-a]$ e $X[p-c+p-b] = X[a]$. Portanto $N \in AX$ e $\frac{AN}{NX} = \frac{a}{p-a}$. Se considerarmos os pontos Y e Z onde os
exincírculos relativos aos lados b e c tocam estes lados, respectivamente, podemos mostrar que $N \in BY$ e $N \in CZ$. Conclusão: AX, BY e CZ são concorrentes em N que é chamado *Ponto de Nagel* do $\triangle ABC$. Ora, ora, poderíamos saber disso usando o teorema de Ceva (veja por exemplo [3]). Calma, o melhor ainda está por vir. As razões aqui são cortesias para nós:

$$\frac{BN}{NY} = \frac{b}{p-b} \quad ; \quad \frac{CN}{NZ} = \frac{c}{p-c}$$



$\square$

O próximo resultado foi o que nos motivou a escrever este artigo. Ele mostra toda a beleza desta teoria, enquanto outros métodos são ineficazes. Para uma demostração completa (e bastante extensa) do próximo resultado usando a geometria plana clássica, veja [2].

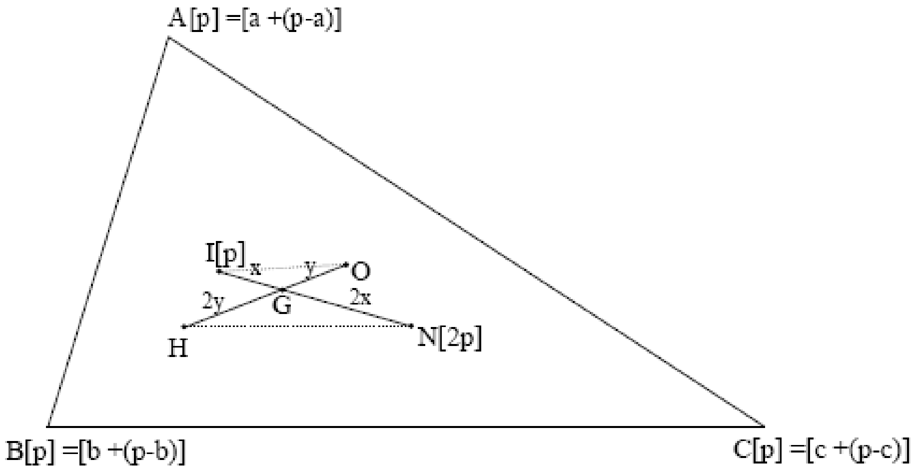
Teorema 3.1 *No $\triangle ABC$ considere os pontos I, G e N como definidos acima. Vale então que I, G e N são colineares e ainda:*

$$\frac{NG}{GI} = \frac{2}{1}$$

Prova: Seja p o semiperímetro do triângulo. Considere um sistema de massas $A[p], B[p], C[p]$. Já sabemos que o C.M. desse sistema é o baricentro G. Fazendo uso da proposição 1, podemos dividir esse sistema em dois subsistemas $S_1 = A[a], B[b], C[c]$ e $S_2 = A[p-a], B[p-b], C[p-c]$. O C.M. de S_1 é o incentro I com massa $[a+b+c] = [2p]$, enquanto o C.M. de S_2 é o ponto da Nagel N com massa $[p-a+p-b+p-c] = [p]$. Logo G será o C.M. de $I[2p], N[p]$ o que implica I, N, G colineares (com G entre I e N) e ainda pela equação do momento linear:

$$\frac{NG}{GI} = \frac{2}{1}$$

Corolário 3.1.1 *Em um triângulo qualquer ABC, sejam I, G, N como acima, O o circuncentro e H o ortocentro. Então os pontos I,O,N,H formam um trapézio.*



Prova: Sabemos que H, G, O são colineares (reta de Euler) e que:

$$\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1}$$

Segue então do teorema anterior que IO é paralelo a NH, logo I,O,N,H formam um trapézio, cujo encontro das diagonais é G.

□

Podemos aplicar estes métodos do centro de massa em problemas que envolvem o ortocentro, o baricentro e os exincentros, para saber que massas devem estar nos vértices, veja o problema 1. Divirta-se resolvendo estes problemas. Vale usar tudo, mas experimente a sua mais nova arma.

4 Problemas Relacionados

Problema 1

(a) Verifique que o sistema $A\left[\frac{a}{\cos A}\right], B\left[\frac{b}{\cos B}\right], C\left[\frac{c}{\cos C}\right]$ tem como C.M. o ortocentro do triângulo.

(b) Verifique que o sistema $A[\text{sen}2A], B[\text{sen}2B], C[\text{sen}2C]$ tem como C.M. o circuncentro.

(c) Prove que o C.M. do sistema $A[-a], B[b], C[c]$ é o exincentro relativo ao lado a. Verifique os análogos para os outros exincentros.

Problema 2
Sejam A,B,C,D pontos concíclicos. Sejam G_A, G_B, G_C, G_D os baricentros dos triângulos BCD, ACD, ABD e ABC. Prove que G_A, G_B, G_C, G_D são concíclicos.

Problema 3
Seja ABCD um quadrilátero no espaço de forma que AB, BC, CD e DA sejam tangentes a uma esfera γ nos pontos X, Y, Z, W. Prove que estes pontos são coplanares.

Problema 4
Sejam X, Y e Z os pontos onde o incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, AC e AB, respectivamente. Mostre que o incentro do $\triangle ABC$ está sobre a reta que passa pelos pontos médios de BC e AX. (veja uma solução em [5])

Problema 5
Considere 6 pontos em uma dada circunferência. Tomamos três destes pontos e marcamos seu baricentro G_1. Em seguida, marcamos o ortocentro H_2 dos outros três pontos e traçamos o segmento G_1H_2. Mostre que todos os $\binom{6}{3} = 20$ possíveis segmentos G_1H_2 passam por um ponto fixo.

Problema 6
Seja ABCD um quadrilátero convexo inscritível com os lados opostos AD e BC se encontrando em P, e AB e CD em Q. Prove que o quadrilátero EFGH, determinado em ABCD pelas bissetrizes de $D\hat{P}C$ e $C\hat{Q}B$, é um losango.

Problema 7
Seja PABC um tetraedro e sejam A_1, B_1, C_1 os pontos médios das arestas BC, AC e AB, respectivamente. Seja α um plano paralelo à face ABC que intercepta as arestas PA, PB, PC nos pontos A_2, B_2, C_2 respectivamente.

(a) Prove que A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concorrem em um ponto D.

(b) Determine o lugar geométrico dos pontos D quando α varia.

Problema 8

(a) Considere 4 pontos que formam um sistema ortocêntrico (cada um é o ortocentro do triângulo formado pelos outros três). Ponha massas iguais nesses 4 pontos. Prove que o centro de massa é o centro do círculo dos nove pontos (veja [1]).

(b) (Beltrami) Prove que o C.M. do sistema formado pelo incentro e pelos três exincentros com massas iguais é o circuncentro.

Problema 9
Seja ABCD um quadrilátero convexo inscritível com os lados opostos AD e BC se encontrando em P, e AB e CD em Q. Prove que as bissetrizes dos ângulos $D\hat{P}C$ e $C\hat{Q}B$ e a reta que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero ABCD (diagonal de Euler) concorrem.

Problema 10
(Banco IMO/97)No $\triangle ABC$ acutângulo, sejam AD, BE alturas e AP, BQ bissetrizes internas. Sejam I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente. Prove que os pontos D, E e I são colineares se e somente se P, Q e O são colineares.

Agradecimentos: A nosso amigo Carlos Shine pela primeira versão digitada deste material, na Semana Olímpica 2001 em Salvador-BA.

References

[1] Coxeter, H.S.M.; Greitzer, S.L.,*Geometry Revisited*, MAA, 1967.

[2] Johnson, R.A., *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, 1960.

[3] Castro, L.G.M., *Introdução à Geometria Projetiva*, *Eureka!*, vol 8, pp16 - 27, 2000.

[4] Honsberger, R. , *Mathematical Morsels*, MAA, 1978.

[5] Moreira, C.G.T., Wagner, E., *10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática*, OEI, 1996.