MEU PROBLEMA DE MATEMÁTICA FAVORITO: O RESTA UM INFINITO
- UM GUIA DE AULA -

EMANUEL CARNEIRO

1. Introdução

Tirei uns dias de férias, e lembrando-me com alegria do meu tempo quando era professor na escola resolvi escrever este breve texto que espero ser útil para propagar a alegria matemática nas escolas brasileiras.

Se alguém me propusesse o seguinte desafio:

"– Emanuel, você tem uma hora de aula para mostrar a beleza da matemática a um grupo de crianças, jovens e adultos. O quê você faria?"

Vou mostrar nessa nota a vocês o que eu faria. Se eu tivesse que escolher um único problema para dar uma aula, seria este aqui – daí o título da nota: meu problema favorito. Escreverei aqui tendo o professor em mente, como se isso fosse de fato um guia para uma aula, pois gostaria que vocês tentassem isso com os seus alunos e depois me digam como foi a experiência (podem escrever para o meu email que está no final da nota). Para mim, se esse problema de matemática fosse um filme, seria *O poderoso chefão*, se fosse um piloto de carros, seria o *Ayrton Senna*, se fosse um jogador de basquete seria o *Michael Jordan*. Não lembro ao certo onde o vi pela primeira vez, mas lembro que foi na minha adolescência. Espero que vocês gostem.

Em termos de conhecimentos prévios, você, professor, certamente poderá brincar com esse problema com alunos de todas as idades (digamos, de 8 anos pra cima), mas para que eles entendam e apreciem a solução terão que saber um pouquinho sobre progressões geométricas e equações do segundo grau (então aqui seria, digamos, de uns 13-14 anos pra cima). Por trás do contexto do problema, haverá belas noções de combinatória, análise e topologia (que talvez você nem perceba de início, mas elas estão lá...).

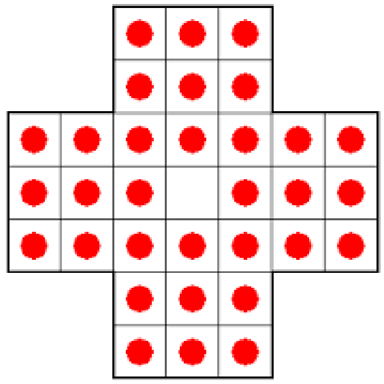
1.1. **O que você (professor) vai precisar?** Você vai precisar de algumas coisas básicas:

- O combo quadro-negro/giz (quadro/pincel) usual.
- Para cada aluno: lápis, papel, borracha (e se você quiser, régua e feijoezinhos).
- Algo para alegrar seus alunos (e.g. um par de caixas de chocolates, alguns vale-lanches na escola e outros brindes que você achar interessantes, como livros, ingressos de cinema, etc).

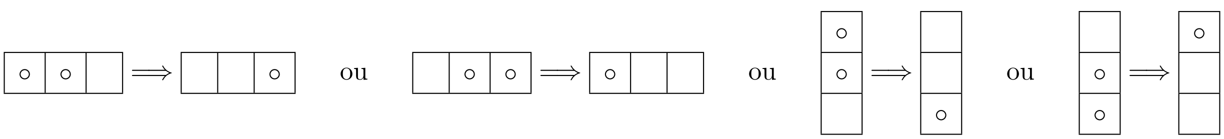
Até aqui muito fácil, não é?

1.2. **Os movimentos: o jogo do "Resta um".** Nosso ponto de partida é o jogo clássico chamado "Resta um", como por exemplo na figura abaixo em seu tabuleiro mais famoso em forma de cruz:

Date: 28 de julho de 2021.



Nesse jogo, você começa com algumas peças e seu objetivo é terminar só com uma peça no tabuleiro. O movimento permitido é o seguinte: se houver duas peças adjacentes seguidas de uma casa vazia (nas direções horizontal ou vertical, mas NÃO em diagonal), o jogador pode mover uma das peças sobre a outra. A peça que saltou termina o movimento na casa que estava inicialmente vazia, enquanto a outra que foi "comida" é retirada do jogo. Veja os possíveis movimentos na figura abaixo:



Enfatizando: tal movimento pode acontecer da esquerda para a direita, da direita para a esquerda, de cima para baixo ou de baixo para cima; mas não em diagonal. Tenha a certeza que seus alunos entenderam o movimento permitido (e que a cada movimento, teremos uma peça a menos no jogo).

2. O problema

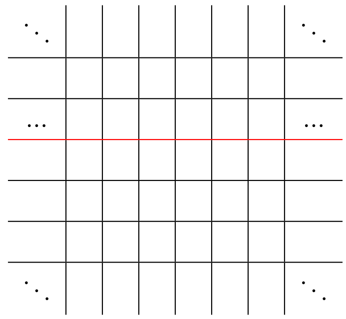
O ambiente em que vamos jogar não é exatamente o tabuleiro em forma de cruz como acima, mas sim um tabuleiro quadriculado infinito, onde cada quadradinho do tabuleiro poderá estar vazio ou ter uma peça. O problema que iremos discutir é o seguinte:

Problema (*"Resta um" infinito*): Imagine que você tem um tabuleiro quadriculado infinito, na qual foi marcada uma linha horizontal em vermelho que vamos chamar de marco zero. Você pode dispor uma quantidade finita de peças à sua escolha (por exemplo 2, 10, 50, 100.000, ...), onde você quiser (no máximo uma peça por casa), *desde que todas estejam abaixo do marco zero*. Essa será a sua configuração inicial. Seu objetivo é jogar o jogo, com os movimentos do "Resta um" e fazer com que uma de suas peças chegue em uma fila (horizontal) o mais alto possível acima do marco zero. A pergunta é: em qual fila você pode chegar?

Seus alunos perguntarão:

"– Professor, mas como é que eu vou desenhar um tabuleiro infinito no meu caderno..?"

Aí você explica direitinho que eles podem simplesmente pensar em um reticulado bem grande onde podem adicionar mais linhas e colunas à medida que forem precisando. Por exemplo, como na figura abaixo, onde utilizamos as reticências para indicar que o tabuleiro continua em todas as direções (mas note o marco zero marcado em vermelho).



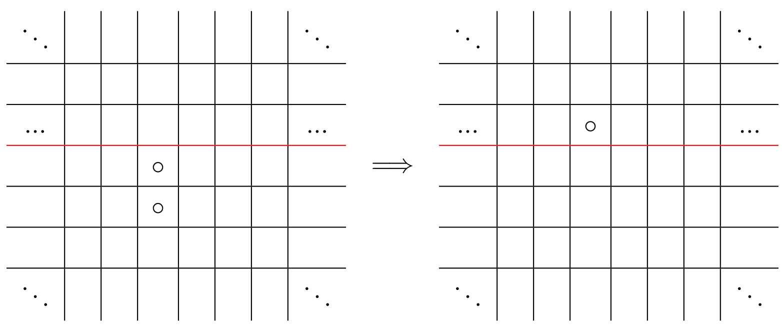
3. O começo da caminhada

Agora, você, professor, vai dedicar alguns minutos para ter certeza que seus alunos compreendam o jogo direitinho. A ideia é fazer uma breve discussão inicial.

3.1. Mostrando alguns exemplos.

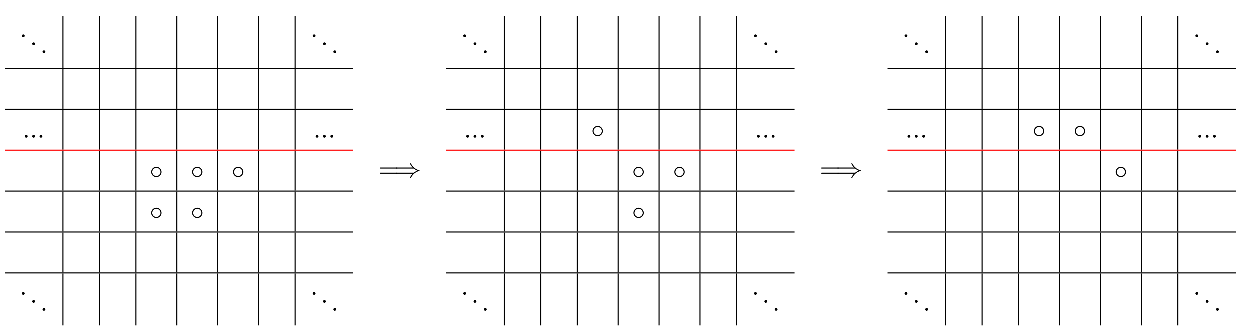
Mostrando alguns exemplos. Eu sugiro que você mostre no quadro para eles como chegar na 1a fila e na 2a fila. Você dirá:

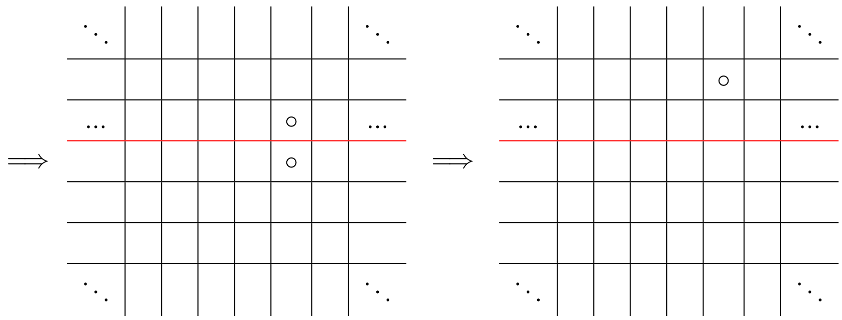
“ – Pessoal, por exemplo, chegar na 1a fila acima do marco zero é bem fácil, não é? É só tomar uma configuração inicial assim e realizar um movimento só...”



Você então prosseguirá:

“ –Pessoal, agora vamos ver como poderíamos chegar na 2a fila.”





E você continua:

"– E então, todo mundo entendeu?"

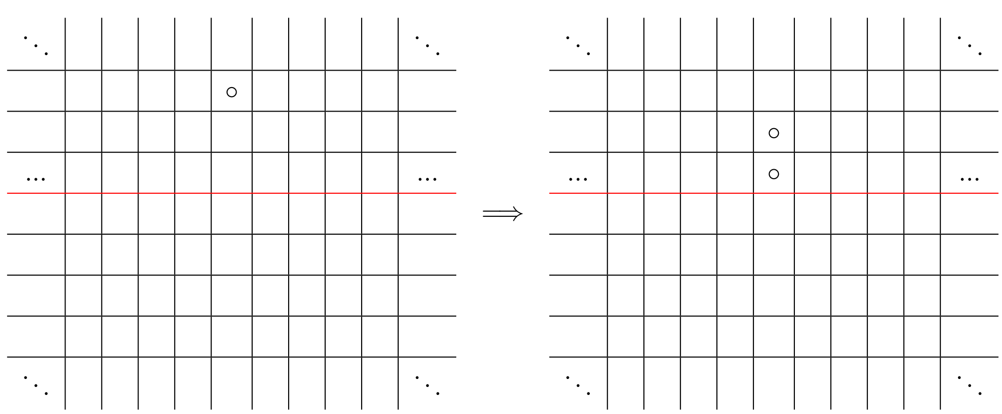
Agora é o momento oportuno de começar a ofertar os seus prêmios para estimular os seus alunos:

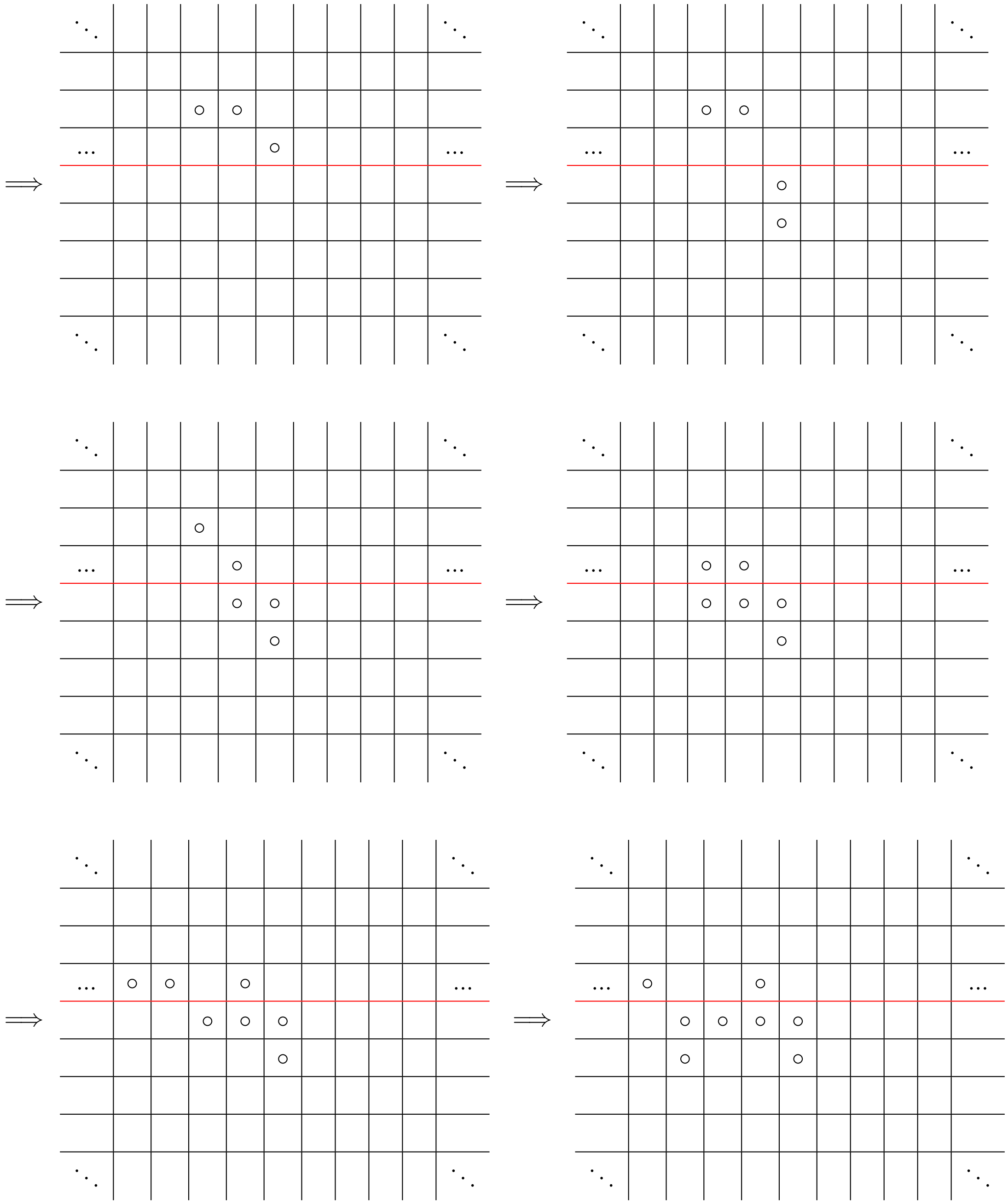
"–Vale então um chocolate pra quem conseguir me mostrar como chegar na 3a fila..."

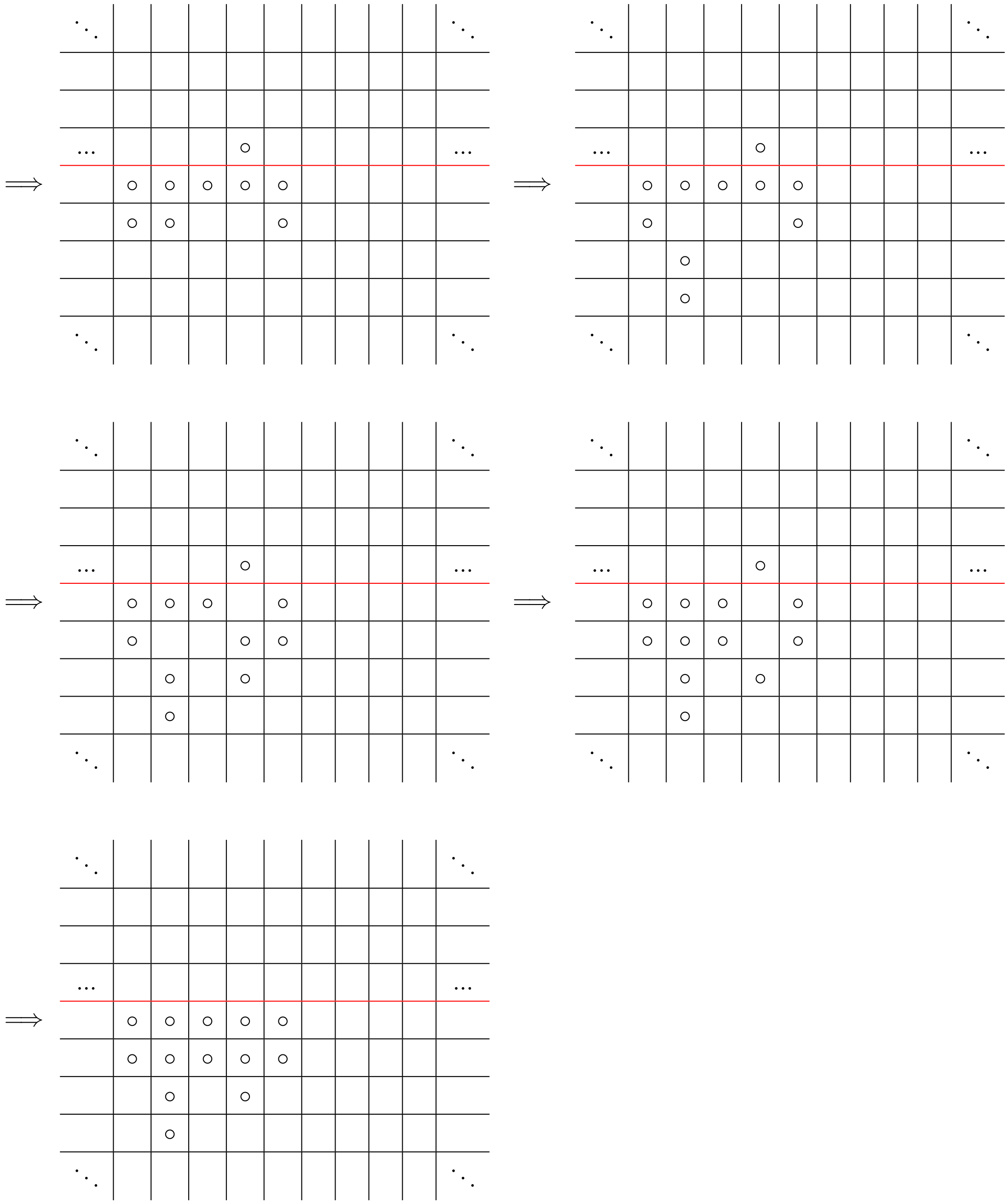
Deixe-os pensando por algum tempo (digamos, individualmente ou em grupos, em suas cadeiras com papel e lápis, apagando com a borracha, ou com feijoezinhos se você preferir...). Se alguém disser que conseguiu, chame o aluno(a) ao quadro e sugira que ele(a) mostre aos colegas como fazer. Se estiver tudo certinho, presenteie com um chocolate, chame os aplausos da turma, e a brincadeira começa!

3.2. **Uma visão alternativa.** Depois de um tempinho, talvez seja interessante compartilhar com os alunos uma visão um pouquinho diferente (mas totalmente equivalente) do problema. Uma pessoa na verdade pode jogar "de trás pra frente". Em vez de uma peça "comer" outra em cada movimento, você pode pensar que uma peça "cria" outra em cada movimento (desde que ela tenha duas casas consecutivas adjacentes vazias). Assim o jogo passaria a ser então: você começa com uma peça em uma certa fila acima do marco zero, e tenta jogar "de trás pra frente" até que todas as suas peças fiquem abaixo do marco zero. Veja a figura anterior (no caso da 2a fila) na ordem reversa. Para algumas pessoas essa forma de pensar pode ser mais fácil (eu particularmente acho mais fácil...). Nessa concepção, o problema fica sendo relacionado a "criar espaço" para os lados e para baixo para as peças possam "nascer"...

Diga para os seus alunos tentarem esse ponto de vista para chegar até 3a fila (ou melhor, retornar dela...rsrsrs). Eis aqui uma possível configuração, passo a passo, começando da 3a fila.







Agora, se você quiser, é só refazer os movimentos...A configuração acima tem 13 peças, e digitei aqui de maneira simples, sem pensar muito...fui tentando abrir os espaços, indo, indo, até chegar. Existem muitas e muitas maneiras diferentes de se chegar ao objetivo, e provavelmente os seus alunos encontrarão várias delas. É um problema interessante saber *qual é a quantidade mínima de peças* que você precisaria abaixo do marco zero para chegar até a 3a fila (você saberia me dizer...?). Enquanto isso, na sua sala de aula, essa é uma boa oportunidade para você distribuir mais prêmios...Antes de mover a discussão para a 4a fila, se algum aluno tiver conseguido chegar à 3a fila com, digamos, 13 peças, você pode oferecer um chocolate pra quem conseguir com 12 ou menos, e assim por diante...para ver até onde vocês conseguem chegar...

Nota: as figuras acima podem dar uma sensação que o método é complicado, mas quando os alunos pegam o jeito, começam a fazer em seus cadernos, apagando com suas borrachas (ou utilizando feijões), visualizam isso de forma relativamente rápida...

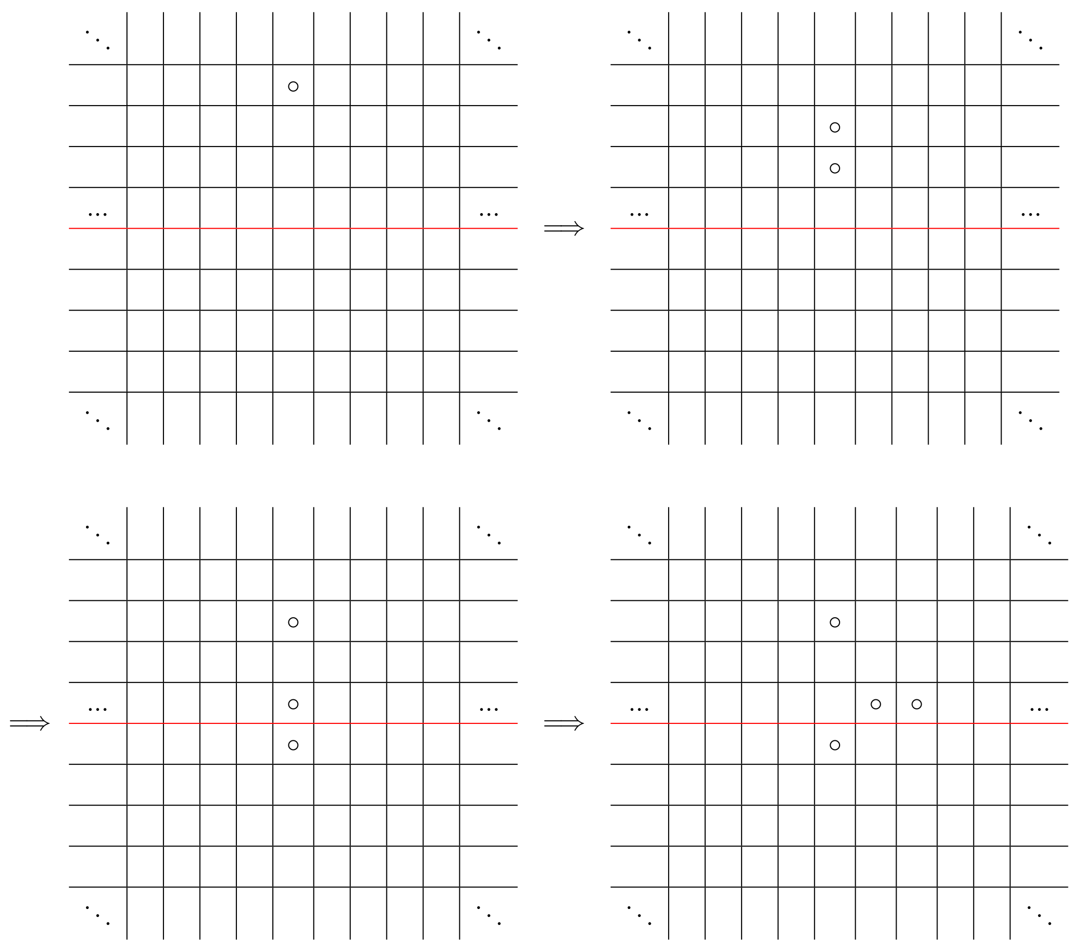
3.3. **Chegando à 4a fila.** Uma vez que você aprofundou a discussão com seus alunos sobre como chegar à 3a fila, com quantas peças dava pra fazer isso, distribuiu vários chocolates, deixou todo mundo empolgado...agora é hora se subir a aposta:

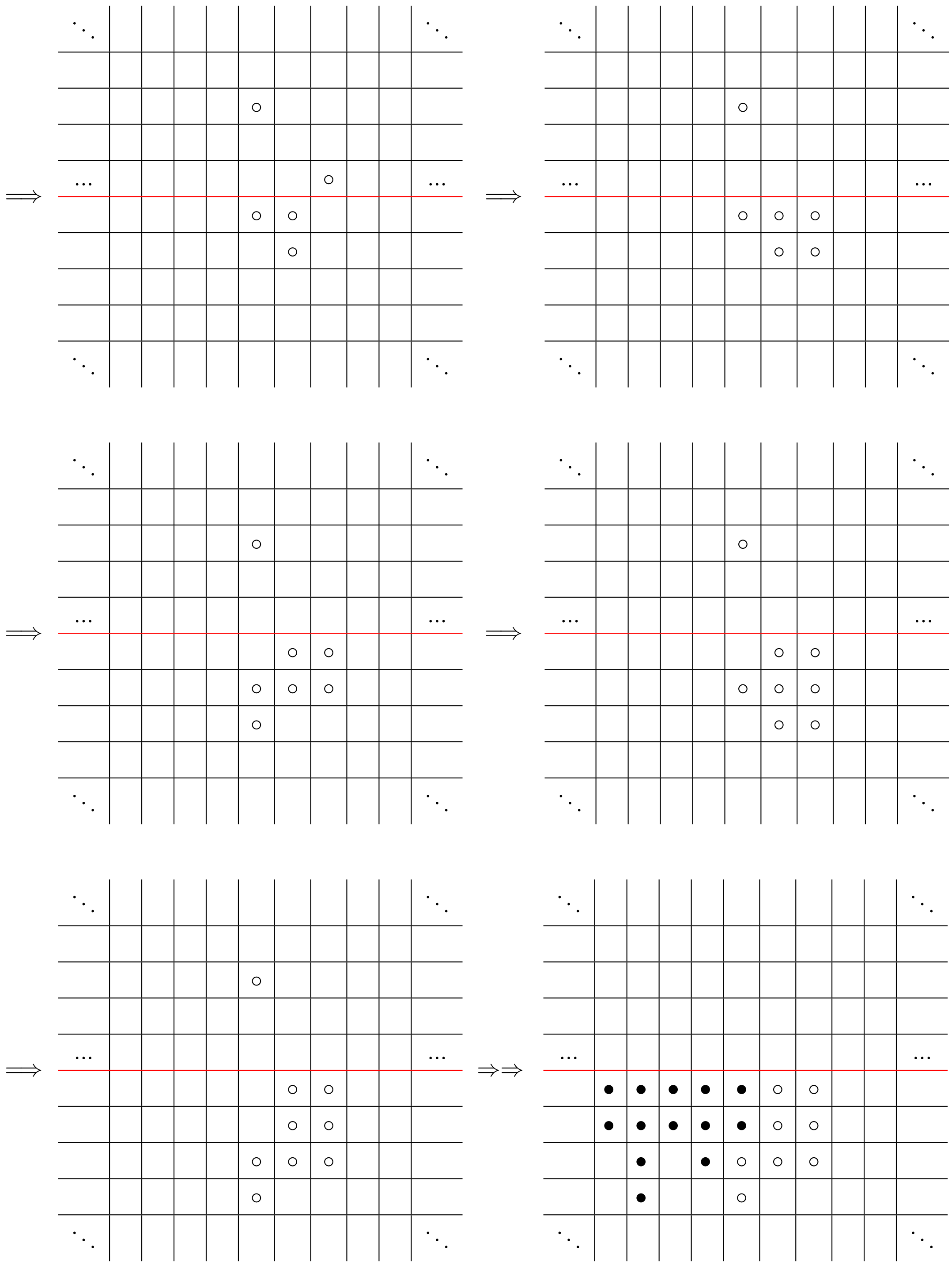
"– Pessoal, agora quem será que consegue chegar até a 4a fila? Valendo 3 chocolates (ou um lanche, ou um livrinho)!"

Novamente, dê um tempo para eles pensarem, individualmente ou em pequenos grupos, com seus tabuleiros, lápis, borrachas, feijoezinhos, etc. Dê umas dicas, se for preciso. Depois de algum tempo, alguém aparecerá com uma proposta de solução. Convide-o(-a) pro quadro para um debate com os colegas. Se estiver tudo certinho, dê o prêmio, peça os aplausos da turma! A discussão então continua:

"– Será que dá pra fazer com menos peças? Ou alguma solução alternativa? Mais uns chocolates pra quem conseguir...".

Vou tentar fazer aqui de maneira tranquila, sem me preocupar muito em economizar os movimentos. O leitor perspicaz aqui começa a perceber que parece haver um certo probleminha para "encontrar espaço" pra fazer as coisas...Vamos lá, eis uma proposta para a 4a fila (novamente vou fazer na filosofia reversa):





Na penúltima passagem acima, observe que chegamos a uma situação familiar. Só temos uma peça acima do marco zero, na 3a fila. Já sabemos como trazê-la para baixo, e já "abrimos o espaço" para usar o caso anterior. O último "movimento" acima é na verdade uma coleção de 12 movimentos, onde simplesmente utilizamos o caso anterior (em que começávamos apenas com uma peça na 3a fila), e onde identifiquei com bolinhas pretas as que serão utilizadas nesses 12 movimentos. A conclusão portanto é que podemos chegar até a 4a fila com 21 peças. Será possível com menos? Discuta com os seus alunos e distribua os prêmios...

4. O grande momento

4.1. **A grande aposta.** Nesse momento irei sugerir que você leitor, professor ou aluno, que chegou até aqui, tire alguns minutos para pensar em como chegar na 5a fila.

...minutos depois...

Você irá começar a perceber que as coisas parecem já ficar mais difíceis. Será que dá? Como? Será que não dá? Por quê?

Voltando à sua aula, professor, você irá então aumentar ainda mais a aposta com os seus alunos:

"– Pessoal, agora quem será que consegue chegar até a 5a fila? Valendo agora uma caixa de chocolate! Valendo uma semana de merenda na escola! (E outros prêmios mais audaciosos se você quiser...)"

A turma irá se alvoroçar e todos partirão desesperados em busca do grande prêmio. Depois de alguns minutos provavelmente você terá alguns "candidatos" dizendo que conseguiram...chame-os (as) ao quadro e peça para mostrar aos colegas. É muito provável (mais sobre isso abaixo) que não esteja correto...então tente fazer com a que a turma descubra o erro, mas encoraje o aluno(a) candidato(a) e o resto da turma com palavras de motivação:

"– Vamos lá...bom trabalho, vocês parecem estar chegando perto...atenção para não errar...será que vai dar? Será que esse prêmio vai sair?"

4.2. **A revelação.** Depois de alguns minutos, você provocará a turma com a grande revelação:

"– *Pessoal, não é possível chegar à 5a fila.*"

Você ouvirá reclamações..."o quê?" , "que absurdo!", "dá sim professor, eu estou quase lá!".

E você continuará:

"– *Eu vou provar pra vocês que não dá.*"

Aqui entramos em uma discussão filosófica importante na formação do pensamento matemático de um jovem. O conceito do impossível, e de como de fato provar que algo é impossível. É muito marcante para um jovem de 12, 13, 14, 15 anos ver isso pela primeira vez e se convencer.

Nós matemáticos temos muito apreço pela palavra "impossível". Alguém pode chegar e ter dizer que é impossível que um ser humano corra a maratona ($42,195$ km) em 1h:30m. O recorde atual oficial é de 2h:01m:39s, mas na verdade isso seria um uso que não é matematicamente correto da palavra "impossível". É extremamente "implausível" hoje em dia, mas ninguém pode de fato garantir que daqui a 10000 anos isso não possa ser atingido. Então o seu aluno pode questionar:

"– Professor, será então que a situação não é a mesma? Só porquê você não sabe fazer hoje, de repente daqui a alguns milhares de anos alguém pode ter uma ideia fenomenal de como fazer..."

E você vai então discutir com os seus alunos o conceito de uma prova matemática. Quando alguém prova (corretamente) alguma coisa em matemática, não há margem para subjetividade. A verdade é aquela e ponto final, independente se você gosta ou não. Você irá enfatizar:

"– *Eu repito: eu vou PROVAR pra vocês que não dá. E vocês irão se convencer.*"

4.3. **A prova.** A demonstração abaixo é folcloricamente atribuída ao incrível matemático John Conway (1932 - 2020), da Universidade de Princeton nos EUA. Conway era um grande entusiasta de jogos matemáticos.

4.3.1. *A energia de cada casa.* A ideia da prova é por contradição. *Suponha que exista uma configuração inicial (abaixo de marco zero) e uma sequência de movimentos que te leve até uma casa na 5a fila, que você batizará com o número* 1.

$\ddots$										$\ddots$
					1					
...										...
$\ddots$										$\ddots$

Nós iremos associar a cada casa do tabuleiro uma certa "energia" (um número real positivo). Já há uma casa associada à energia 1. Seja $x > 0$ um número real positivo (a ser devidamente escolhido em breve). Começando da casa 1, você irá caminhar para a esquerda, para a direita e para baixo sempre multiplicando por x. Isso te dá:

$\ddots$										$\ddots$
	x^4	x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3	x^4	
					x					
					x^2					
					x^3					
...					x^4					...
					x^5					
					x^6					
					x^7					
					x^8					
$\ddots$					$\vdots$					$\ddots$

E você continua, a partir da coluna central (a quem tem o número 1 na 5a fila), ao andar para a direita multiplique por x, a ao andar para a esquerda multiplique por x. Você chegará então à seguinte configuração:

$\ddots$										$\ddots$
...	x^4	x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3	x^4	...
...	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5	...
...	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	...
...	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	...
...	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	...
...	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	...
...	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	...
...	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	...
...	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	...
$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Cada casa, da 5a fila para baixo tem então uma certa energia associada (observe que não precisamos nos preocupar com as filas acima da 5a fila, pois podemos assumir sem perda de generalidade que aquele é o momento em que você chega pela primeira vez à 5a fila a partir do marco zero).

4.3.2. *A unidade de energia mágica.* Vamos agora escolher o x mágico como sendo:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Exclamações da turma: "Uau!", "Por quê?". Você verá em breve.

Esse valor muito especial de x verifica $0 < x < 1$, e é uma das raízes da equação do segundo grau:

$$x^2 + x - 1 = 0. \tag{4.1}$$

A equação (4.1) pode ser reescrita como

$$1 = x + x^2\,,$$

e se multiplicarmos ambos os lados por uma potência x^n com, digamos, $n \in \mathbb{Z}$, obtemos a identidade:

$$x^n = x^{n+1} + x^{n+2}. \tag{4.2}$$

4.3.3. *A energia total do sistema.* Há algumas linhas atrás eu chamei o x que escolhi de "mágico", mas ainda não expliquei o real porquê. Falemos disso agora então.

Em cada momento do nosso jogo, vamos definir a *energia total da configuração* como a *soma das energias de cada casa que tem uma peça.* Ao realizarmos um movimento, as três casas envolvidas podem ser da seguinte forma:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x^n & x^{n+1} & x^{n+2} \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x^{n+1} & x^n & x^{n+1} \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x^{n+2} & x^{n+1} & x^n \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|}\hline x^n \\ \hline x^{n+1} \\ \hline x^{n+2} \\ \hline \end{array}$$

para algum $n \geq 0$. Lembrando de (4.2), observe que:

(i) $x^{n+1} + x^{n+2} = x^n$.
(ii) $x^n + x^{n+1} > x^{n+2}$ (de fato, isso é equivalente a $1 + x > x^2$).
(iii) $x^{n+1} + x^n > x^{n+1}$.

Em virtude de (i), (ii) e (iii) acima chegamos à seguinte conclusão, que é de fato a mágica da ideia:

Ao realizarmos um movimento, a energia total não aumenta.

A energia total permanecerá a mesma, se estivermos no caso (i) acima, ou diminuirá, se fizermos um movimento nos casos (ii) ou (iii) acima.

4.3.4. *Conclusão.* Lembre-se que estamos supondo que começamos com uma configuração abaixo do marco zero e chegamos até a quinta fila, na casa que batizamos de 1. *A energia final, portanto, deve ser maior ou igual a* 1.

Por outro lado, vejamos agora qual é o *total de energia disponível abaixo do marco zero.* Vamos somar tudo usando sempre a fórmula para a soma de uma progressão geométrica de razão positiva e menor que 1:

$$1 + y + y^2 + y^3 + \ldots = \frac{1}{1-y}.$$

Na primeira fila abaixo do marco zero, temos:

$$(x^5 + x^6 + x^7 + \ldots) + (x^6 + x^7 + \ldots) = x^5(1 + x + x^2 \ldots) + x^6(1 + x + x^2 \ldots) = \frac{x^5}{1-x} + \frac{x^6}{1-x}.$$

Na segunda fila abaixo do marco zero, temos:

$$(x^6 + x^7 + x^8 + \ldots) + (x^7 + x^7 + \ldots) = x^6(1 + x + x^2 \ldots) + x^7(1 + x + x^2 \ldots) = \frac{x^6}{1-x} + \frac{x^7}{1-x}.$$

Na terceira fila abaixo do marco zero, temos:

$$(x^7 + x^8 + x^9 + \ldots) + (x^8 + x^9 + \ldots) = x^7(1 + x + x^2 \ldots) + x^8(1 + x + x^2 \ldots) = \frac{x^7}{1-x} + \frac{x^8}{1-x}.$$

E assim por diante. Em geral, na k-ésima fila abaixo do marco zero, teremos a soma:

$$x^{k+4}(1 + x + x^2 \ldots) + x^{k+5}(1 + x + x^2 \ldots) = \frac{x^{k+4}}{1-x} + \frac{x^{k+5}}{1-x}.$$

Somando então as contribuições de todas essas filas obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^5}{1-x} + \frac{x^6}{1-x}\right) + \left(\frac{x^6}{1-x} + \frac{x^7}{1-x}\right) + \left(\frac{x^7}{1-x} + \frac{x^8}{1-x}\right) + \left(\frac{x^8}{1-x} + \frac{x^9}{1-x}\right) \ldots \\
&= \left(\frac{x^5}{1-x}\right)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) + \left(\frac{x^6}{1-x}\right)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \\
&= \frac{x^5}{(1-x)^2} + \frac{x^6}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x^5 + x^6}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x^4}{(x^2)^2} \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Na penúltima passagem acima, utilizamos a mágica definição de x, que por (4.2) nos dá $x^5 + x^6 = x^4$, e também pela equação original (4.1) nos dá $1 - x = x^2$.

A conclusão a que chegamos em (4.3) é a seguinte: ao somarmos as energias de TODAS as casas abaixo do marco zero (um número infinito de casas), obtemos exatamente 1.

Agora é o momento em que você irá voltar lá no início, no enunciado do problema, e vai notar a presença sutil de uma palavrinha muito importante. Eu disse que você poderia começar com uma quantidade arbitrária de peças abaixo do marco zero, mas que fosse uma quantidade *finita* de peças. Então, ao calcularmos a energia total de sua configuração inicial, iremos encontrar inevitavelmente algo que é *estritamente menor do que* 1.

Como a cada movimento, a energia total não pode aumentar, a energia final é menor ou igual que a energia inicial, e portanto não pode ser maior ou igual a 1. Chegamos portanto a uma contradição.

A prova está concluída.

5. Comentários finais

Agora que você sabe até onde é possível chegar, se quiser fazer uma aposta maior ainda com seus alunos para o problema de chegar à 5a fila, você pode fazer. Pode apostar 100 reais, seu carro, ou uma viagem às Bahamas se você quiser...mas cuidado para eles não desconfiarem muito...rsrsrs...

Tente utilizar as ideias com a energia do sistema acima para revisitar o problema sobre as configurações mínimas de peças que você precisa para chegar à 3a e 4a filas. Pode ajudar.

Esse problema é muito rico em ideias, e se você quiser ir adiante pode pensar em mini-projetos de pesquisa com seus alunos. Por exemplo, podemos substituir o plano pelo espaço tridimensional, e tomar o marco zero como um plano. Quão alto podemos chegar? E no caso do espaço d-dimensional, onde o marco zero é um hiperplano de dimensão $(d-1)$: quão alto podemos chegar? Você conseguiria respostas precisas, ou assintoticamente corretas, em termos da dimensão d? Essas são algumas possibilidades (profundas) a serem exploradas...mas fica para uma outra conversa.

Email address: `carneiro@impa.br`

Email address: `emanuelcarneiro@gmail.com`